

# **Feldtheoretische Studien zur Patientensicherheit bei der Magnetresonanztomographie und der Elektrochirurgie**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**DOKTOR-INGENIEURS**

von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik

der Universität Fridericiana Karlsruhe

genehmigte

## **D I S S E R T A T I O N**

von

Dipl.-Phys. Marc-André Golombeck

aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung:

22. Dezember 2003

Hauptreferent:

Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel

Korreferent:

Prof. Dr.-Ing. Werner Wiesbeck

Karlsruhe, den 05. Januar 2004



## Zusammenfassung

Die Magnetresonanztomographie und die Elektrochirurgie gehören seit vielen Jahren zu den diagnostischen und therapeutischen Verfahren der Medizin. Trotz vieler Vorteile bergen diese Verfahren auch gesundheitliche Risiken. Dies betrifft insbesondere Patienten mit aktiven oder passiven Implantaten, die durch die induzierten oder eingeprägten Ströme mit einer Funktionsstörung ihres Implantats oder einer Erwärmung von Elektroden im und am Körper rechnen müssen. Bei allen Nutzen muss daher stets die Sicherheit des Patienten beachtet werden.

Inhalt dieser Arbeit sind Untersuchungen der Patientensicherheit bei der MR-Tomographie und der Elektrochirurgie mit Hilfe feldtheoretischer Methoden. Dazu gehören sowohl numerische Studien und feldtheoretische Abschätzungen, als auch experimentelle Untersuchungen. Es wurden dabei experimentelle Aufbauten in numerische Modelle umgesetzt und analog zum klinischen Experiment simuliert. Des Weiteren wurden mit Hilfe von hochauflösten Körperdatensätzen numerische Modelle des menschlichen Körpers erstellt, welche Einblicke in die Feldverteilung im Körper ermöglichten.

Es wurden experimentelle und numerische Untersuchungen zur Erwärmung von Schrittmacher-elektroden und Kabeln durch Hochfrequenzpulse von MR-Tomographen durchgeführt. Die Ergebnisse von Studien mit hochauflösten Modellen des menschlichen Körpers zeigten, dass die Aussagen aus experimentellen Phantomstudien nicht uneingeschränkt auf den Menschen übertragen werden können. Die berechneten Erwärmungen an Elektrodenspitzen in den Körpermodellen lagen deutlich unter den Werten aus Phantomstudien. Insgesamt konnte bei keinem berechneten Modell eine gewebeschädigende Erwärmung nachgewiesen werden. Es wird vermutet, dass für Patienten mit Implantaten weitaus weniger Risiken bestehen, als bisher angenommen. Sicherheitsbestimmungen, die allein aus Phantomexperimenten abgeleitet werden, sind daher in Frage zu stellen.

Weiterhin wurden die Auswirkungen von gepulsten magnetischen Gradientenfeldern im Hinblick auf die mögliche Stimulation von Muskel- und Nervengewebe untersucht. Mit Hilfe einer Fourierreihenentwicklung wurden zwei typische Gradientenpulsformen zerlegt, um so die Ströme in einem Körpermodell berechnen zu können. Es konnte gezeigt werden, dass heutige Gradientensysteme in der Lage sind, auch tieferliegende Strukturen wie den Herzmuskel zu stimulieren. Mit dem hier vorgestellten Verfahren ist es möglich, beliebige Gradientenpulsformen zu betrachten und numerisch die Risiken für eine Stimulation von Muskel- und Nervengewebe abzuschätzen.

Bei der Elektrochirurgie spielt die Erwärmung unter der Neutralelektrode eine wichtige Rolle, da es zu Verbrennungen der Haut kommen kann. Es wurde ein numerisches Modell eines menschlichen Oberschenkels mit einer Neutralelektrode erstellt. Dabei konnte gezeigt werden, dass durch einen zusätzlichen Außenring die Erwärmung der Hautoberfläche verringert werden konnte. Ausgehend von diesen Ergebnissen wurde mit einer theoretischen Abschätzung ein Zusammenhang zwischen Elektrodengröße und maximaler Hauttemperatur abgeleitet, der danach numerisch bestätigt wurde. Dies eröffnet neue Möglichkeiten der Neutralelektrodenentwicklung insbesondere im Hinblick auf kleinere Kinder- und Babyelektroden.

Insgesamt konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, dass es mit den zur Verfügung stehenden numerischen Methoden möglich ist, wichtige Fragestellungen aus der medizinischen Praxis zu beantworten und durch neue Einblicke die Sicherheit für Patienten bei der Magnetresonanztomographie und Elektrochirurgie zu verbessern. Die numerischen Methoden, gekoppelt mit feldtheoretischen Abschätzungen, zeigten sich zum Teil sogar experimentellen Studien durch eine höhere Genauigkeit und damit größere Aussagekraft der Ergebnisse überlegen.



## Abstract

Magnetic resonance imaging and electrosurgery are common therapeutic and diagnostic procedures in modern medicine. In spite of their many advantages these procedures bear some risks for patients. This relates especially to patients with active or passive implants, which may suffer interference or damage as a result of induced currents in the patient's body. These induced currents may also result in the heating of tissue in the vicinity of implanted or attached electrodes. Due to these risks patient safety is an issue which requires careful consideration of the phenomena involved.

The contents of this thesis include investigations of patient safety during magnetic resonance imaging and electrosurgery using methods based on electromagnetic theory. These involve numerical studies, theoretical approximation and experimental investigations. The simulations were set up according to clinical experiments using high-resolution models of the human body, which allowed a closer look into the field distribution inside the body.

Experimental and numerical investigations regarding the heating of pacemaker electrodes and wires by radiofrequency pulses of MR-scanners were performed. The results of numerical studies with high-resolution models of the human body showed that the conclusions drawn from experimental investigations using saline body phantoms cannot be transferred to the human body. The calculated heating at electrode tips in the body models showed significantly lower values than in saline phantoms. Altogether no harmful heating effects could be found in any investigated numerical body model. It seems likely that patients with implants are exposed to fewer risks than often postulated. Safety regulations which are derived only from phantom studies must be questioned.

Furthermore, the impact of pulsed magnetic gradient fields regarding stimulation of muscle and nervous tissue was investigated. Using a Fourier series expansion two gradient pulse forms were analysed in order to calculate the induced currents in a numerical model of the human body. It was shown that the gradient systems of modern MR-scanners are also able to stimulate deeper structures such as the heart muscle. With the procedure presented in this thesis it is possible to analyse a wide variety of different gradient pulse forms and numerically estimate the risks of stimulation of excitable tissue.

The heating of the skin under return electrodes is of major interest in electrosurgery, as burning of the skin occurs under certain circumstances. In this thesis a numerical model of the human thigh with a return electrode was set up. It could be shown that adding a non connected circumferential ring to the return electrode significantly reduces the heating of the skin. A theoretical investigation showed a correlation between return electrode size and maximum skin temperature and was also proven numerically. This offers new possibilities in the development of smaller return electrodes for children and infants.

In conclusion, the results of this thesis have shown that it is possible to answer important questions in medicine by using available numerical methods. Through new insights into the impact of magnetic resonance imaging and electrosurgery the safety of patients undergoing these procedures could be significantly improved. The results obtained through numerical methods in addition to theoretic electromagnetic approximations were found to show a higher degree of accuracy, and thus yielded a more exact representation of the phenomena observed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung und Problemstellung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation und Aufgabenstellung . . . . .	1
1.2 Aufbau der Arbeit . . . . .	2
<b>I GRUNDLAGEN</b>	<b>5</b>
<b>2 Finite Integrationstechnik</b>	<b>7</b>
2.1 Einführung . . . . .	7
2.2 Ableitung der Gitter-Maxwell-Gleichungen . . . . .	8
2.2.1 Die Maxwell-Gleichungen . . . . .	9
2.2.2 Die Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen . . . . .	10
2.2.3 Die Diskretisierung der Materialgleichungen . . . . .	15
2.2.4 Eigenschaften der Gitter-Maxwell-Gleichungen . . . . .	16
2.2.5 Vorteile der Finiten-Integrations-Technik . . . . .	17
2.3 Die Gitter-Maxwell-Gleichungen im Frequenzbereich . . . . .	18
2.3.1 Ableitung der diskreten Systemgleichung . . . . .	18
2.3.2 Dielektrische und magnetische Verluste . . . . .	19
2.3.3 Wahl der Randbedingungen . . . . .	20
2.3.4 Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	20
2.4 Ableitung der Gitter-Wärmeleitungsgleichung . . . . .	21
2.4.1 Grundlagen des Wärmetransports . . . . .	21
2.4.2 Die Diskretisierung der Biowärmeleitungsgleichung . . . . .	23
2.5 Die Gitter-Wärmeleitungsgleichung im Zeitbereich . . . . .	25
2.5.1 Explizite Zeitintegration . . . . .	25
2.5.2 Implizite Zeitintegration . . . . .	26

2.5.3	Adaptive Zeitschrittsteuerung des thermodynamischen Lösers . . . . .	27
2.6	Numerische Kopplung elektrodynamischer und thermodynamischer Prozesse . . . . .	29
2.7	Das Programm Paket MAFIA . . . . .	32
2.7.1	Einführung . . . . .	32
2.7.2	Der modulare Aufbau von MAFIA . . . . .	33
2.8	Zusammenfassung . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Dielektrische Eigenschaften von Körpergewebe</b>	<b>37</b>
3.1	Einführung . . . . .	37
3.2	Historischer Überblick . . . . .	38
3.3	Physikalische Größen und Effekte . . . . .	39
3.3.1	Komplexe Permittivität und Leitfähigkeit . . . . .	39
3.3.2	Polarisation und Dispersion . . . . .	41
3.4	Gewebeeigenschaften und mathematische Modelle . . . . .	42
3.4.1	Dispersionsbereiche von biologischem Gewebe . . . . .	42
3.4.2	Die Debye- und die Cole-Cole-Gleichung . . . . .	44
3.4.3	Anwendung der Cole-Cole-Gleichung nach Gabriel . . . . .	45
3.4.4	Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Parameter . . . . .	47
3.5	Zusammenfassung . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Biologische Wirkung elektromagnetischer Felder</b>	<b>49</b>
4.1	Einführung . . . . .	49
4.2	Thermische und athermische Effekte . . . . .	50
4.2.1	Wechselwirkungsvorgänge und Definition einiger Fachbegriffe . . . . .	50
4.2.2	Stimulation von Muskel- und Nervengewebe . . . . .	52
4.2.3	Erwärmung durch hochfrequente elektromagnetische Strahlung . . . . .	55
4.2.4	Weitere athermische Effekte . . . . .	57
4.3	Grenzwerte . . . . .	58
4.3.1	Grundlagen der Grenzwertfindung . . . . .	58
4.3.2	Grundlegende Basisgrenzwerte . . . . .	60
4.3.3	Abgeleitete Referenzwerte . . . . .	61
4.4	Zusammenfassung . . . . .	63

---

---

<b>II</b>	<b>MODELLE UND ERGEBNISSE</b>	<b>65</b>
<b>5</b>	<b>Numerische Voruntersuchungen</b>	<b>67</b>
5.1	Einführung . . . . .	67
5.2	Konvergenzverhalten der Frequenzbereichslöser . . . . .	67
5.2.1	Auswahl der Systemgleichung und des Lösealgorithmus . . . . .	69
5.2.2	Möglichkeiten der Vorkonditionierung . . . . .	69
5.2.3	Probleme der offenen Randbedingung . . . . .	71
5.2.4	Interne Zahlendarstellung und Gitterverfeinerung . . . . .	71
5.2.5	Kontrolle der Lösungen . . . . .	72
5.2.6	Ergebnisse der numerischen Testsimulationen . . . . .	74
5.2.7	Rechenzeit und Speicherbedarf . . . . .	78
5.2.8	Optimale Wahl der numerischen Parameter . . . . .	80
5.3	Vergleich der expliziten und impliziten Zeitintegration . . . . .	81
5.3.1	Aufbau des Kugelmodells . . . . .	82
5.3.2	Numerische Ergebnisse . . . . .	83
5.3.3	Analytische Näherungslösung . . . . .	84
5.3.4	Bewertung der numerischen Verfahren . . . . .	86
5.4	Test der adaptiven Zeitschrittsteuerung . . . . .	87
5.4.1	Vergleich zwischen festem und adaptivem Zeitschritt . . . . .	88
5.4.2	Ersatz einer gepulsten Leistung durch eine mittlere Dauerleistung . . . . .	89
5.5	Zusammenfassung . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Magnetische Hochfrequenzfelder bei der Magnetresonantomographie</b>	<b>93</b>
6.1	Einführung und Motivation . . . . .	93
6.1.1	Kernspinresonanz und Magnetresonantomographie . . . . .	93
6.1.2	Erwärmung von Körpergewebe und Implantaten . . . . .	94
6.1.3	Ergebnisse anderer Forschungsarbeiten . . . . .	95
6.1.4	Inhalt der weiteren Unterkapitel . . . . .	96
6.2	Salzwasserphantome und Magnetresonantomographie . . . . .	97
6.2.1	Eigene experimentelle Arbeiten . . . . .	97
6.2.2	Die allgemeine Wellengleichung und ihre Grenzfälle . . . . .	100
6.2.3	Grenzfälle der Wellengleichung . . . . .	101

---

6.2.4	Lösung der Wellengleichung für ein quaderförmiges Phantom . . . . .	104
6.2.5	Konzeption einer numerischen Studie mit Salzwasserphantomen . . . . .	111
6.2.6	Numerische Ergebnisse der Kabelphantomstudie . . . . .	113
6.2.7	Numerische Modelle im Vergleich mit anderen experimentellen Studien . .	129
6.2.8	Diskussion der experimentellen und numerischen Ergebnisse . . . . .	132
6.3	Simulationen mit hochaufgelösten Körpermodellen . . . . .	135
6.3.1	Tiefenhirnstimulation zur Behandlung der Parkinsonkrankheit . . . . .	136
6.3.2	Erwärmung von Herzschrittmacherelektroden im MR-Tomographen . . .	140
6.4	Wissenschaftlicher Beitrag der Arbeit . . . . .	147
<b>7</b>	<b>Magnetische Gradientenfelder bei der Magnetresonanztomographie</b>	<b>149</b>
7.1	Einführung . . . . .	149
7.1.1	Gradientenfelder und Bildgebung . . . . .	149
7.1.2	Gefahren durch magnetische Gradientenfelder . . . . .	150
7.1.3	Numerische Berechnung von Gradientenpulsen . . . . .	152
7.2	Fourierreihenentwicklung von Gradientenpulsen . . . . .	153
7.2.1	Fourierreihe einer einfachen trapezförmigen Gradientenpulsform . . . . .	153
7.2.2	Fourierreihe einer doppelten trapezförmigen Gradientenpulsform . . . .	154
7.3	Numerische Modellierung . . . . .	156
7.3.1	Aufbau des numerischen Modells . . . . .	156
7.3.2	Durchführung der numerischen Modellierung . . . . .	157
7.3.3	Parameter der modellierten Gradientenpulsformen . . . . .	158
7.4	Ergebnisse der numerischen Simulation . . . . .	159
7.4.1	Auswertung der numerischen Ergebnisse . . . . .	159
7.4.2	Maximale Stromdichte im Körpermodell . . . . .	160
7.4.3	Diskussion der numerischen Ergebnisse . . . . .	162
7.5	Wissenschaftlicher Beitrag der Arbeit . . . . .	164
<b>8</b>	<b>Optimierung von Neutralelektroden in der Elektrochirurgie</b>	<b>165</b>
8.1	Einführung . . . . .	165
8.1.1	Historischer Überblick . . . . .	165
8.1.2	Entwicklung neuer Neutralelektrodendesigns . . . . .	166
8.1.3	Teststandards für Neutralelektroden . . . . .	168

---

---

8.1.4	Inhalt der weiteren Unterkapitel . . . . .	169
8.2	Neutralektroden mit einem Äquipotentialring . . . . .	170
8.2.1	Ergebnisse der klinischen Studie . . . . .	170
8.2.2	Erstellung der Oberschenkelschichtmodelle . . . . .	171
8.2.3	Durchführung der numerischen Modellierung . . . . .	173
8.2.4	Ergebnisse der Simulationsrechnungen . . . . .	174
8.2.5	Diskussion der numerischen Ergebnisse . . . . .	179
8.3	Neutralektroden für Kleinkinder . . . . .	184
8.3.1	Vorteile einer Verkleinerung der Elektrodenfläche . . . . .	184
8.3.2	Numerisches Modell und Rechenstrategie . . . . .	185
8.3.3	Ergebnisse der numerischen Berechnung . . . . .	187
8.3.4	Diskussion der numerischen Ergebnisse . . . . .	189
8.4	Abschätzung der Erwärmung der Kleinkinderelektrode . . . . .	189
8.4.1	Theoretische Vorarbeiten . . . . .	189
8.4.2	Berechnung der Gesamtstromstärke durch die Elektrode . . . . .	191
8.4.3	Veranschaulichung der Stromaufnahme der kreisrunden Elektrode . . . . .	192
8.4.4	Zusammenhang zwischen Stromdichte und Erwärmung . . . . .	193
8.4.5	Vergleich mit den numerischen Ergebnissen . . . . .	194
8.4.6	Diskussion der Näherungslösung . . . . .	195
8.5	Wissenschaftlicher Beitrag dieser Arbeit . . . . .	196
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>197</b>
9.1	Zusammenfassung . . . . .	197
9.2	Ausblick . . . . .	200
<b>III</b>	<b>ANHANG</b>	<b>201</b>
<b>A</b>	<b>Mathematischer Anhang</b>	<b>203</b>
A.1	Lösung der allgemeinen Wellengleichung . . . . .	203
A.2	Der Absolutbetrag der komplexen Amplitude . . . . .	207
A.3	Die Fourierreihenentwicklung von Gradientenpulsen . . . . .	208
A.3.1	Fourierreihe des einfachen trapezförmigen Gradientenpulses . . . . .	209
A.3.2	Fourierreihe des doppelten Trapezgradientenpulses . . . . .	212

---

<b>B Übersichtstabellen</b>	<b>219</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>225</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>233</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>235</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>239</b>
<b>Danksagung</b>	<b>249</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>251</b>

---

# Kapitel 1

---

## Einführung und Problemstellung

---

### 1.1 Motivation und Aufgabenstellung

Die Magnetresonanztomographie und die Elektrochirurgie gehören seit vielen Jahren zu den diagnostischen und therapeutischen Verfahren der Medizin. Die hervorragende Bildqualität und die Verwendung nicht-ionisierender Strahlung macht die MR-Tomographie zu einem der am meisten verwendeten bildgebenden Verfahren. Ebenso ermöglicht die Elektrochirurgie durch den Einsatz hochfrequenter Ströme schonendere operative Eingriffe und verhindert durch die koagulierende Wirkung der hohen Stromdichte am Schneidwerkzeug weitgehend große Blutverluste während einer Operation.

Trotz dieser Vorteile bergen diese Verfahren auch gesundheitliche Risiken. Dies betrifft insbesondere Patienten mit aktiven oder passiven Implantaten, die durch die induzierten oder eingeprägten Ströme mit einer Funktionsstörung ihres Implantats oder einer Erwärmung von Elektroden im und am Körper rechnen müssen. Allerdings sind auch ohne Implantate gesundheitliche Risiken für Patienten vorhanden. Dies ist z. B. die Erwärmung von Körpergewebe durch Energiedeposition aus elektromagnetischen Feldern und damit lokale Gewebeschäden oder eine Überlastung des thermoregulatorischen Systems. Bei Neutralen Elektroden, die in der monopolaren Elektrochirurgie zur Rückführung des Stromes zum Hochfrequenzgenerator dienen, wird z. B. in der Literatur von Verbrennungen der Haut an der Kontaktstelle berichtet. Weiterhin ist durch Ströme in einem gewissen Frequenzbereich die Stimulation von Muskel- und Nervengewebe möglich. Eine unerwünschte Stimulation des Herzmuskels kann zu Herzkammerflimmern und damit auch zum Tod des Patienten führen.

Bei allen Nutzen dieser medizinischen Verfahren muss daher stets die Sicherheit des Patienten beachtet werden. Aus diesem Grund gelten z. B. heute nach wie vor aktive medizinische Implantate im menschlichen Körper als Kontraindikation für eine Untersuchung im Magnetresonanztomographen, obwohl es gerade in diesen Fällen besonders wünschenswert wäre, mit diesem bildgebenden Verfahren den Therapieerfolg zu überprüfen und zu überwachen.

Inhalt dieser Arbeit sind Untersuchungen der Patientensicherheit bei der Magnetresonanztomographie und der Elektrochirurgie mit Hilfe feldtheoretischer Methoden. Dazu gehören sowohl numerische Studien und feldtheoretische Abschätzungen, als auch experimentelle Untersuchungen, wobei der Schwerpunkt auf der Durchführung numerischer Studien liegt. In dieser Arbeit werden

dabei experimentelle Aufbauten in numerische Modelle umgesetzt und analog zum klinischen Experiment simuliert. Des weiteren werden mit Hilfe von hochauflösten Körperdatensätzen numerische Modelle des menschlichen Körpers erstellt, welche Einblicke in die Feldverteilung im Körper ermöglichen, die in experimentellen Studien mit Körperphantomen nicht erfasst werden können. Im einzelnen werden Fragestellungen aus dem Bereich der MR-Tomographie (Hochfrequenz- und Gradientenfelder) und der Elektrochirurgie (Neutralelektroden) untersucht.

Es soll gezeigt werden, mit welchen der verfügbaren numerischen Methoden elektro-thermodynamische Vorgänge mit hochauflösten Modellen des menschlichen Körpers untersucht werden können. Weiterhin sollen mit der ermittelten numerischen Methode die Auswirkungen von magnetischen Hochfrequenz- und Gradientenfeldern der MR-Tomographie auf den menschlichen Körper und auf implantierte Elektroden untersucht und mit vorhandenen experimentellen Studien aus der Literatur verglichen und bewertet werden. In weiteren Studien soll das Erwärmungsverhalten von Neutralelektroden in der Elektrochirurgie an einem Oberschenkelmodell untersucht werden. Anhand der Ergebnisse sollen die für die Erwärmung verantwortlichen physiologischen Parameter und deren Abhängigkeiten bestimmt und neue Konzepte für Neutralelektrodendesigns abgeleitet werden, die zu einer Verringerung der Erwärmung auf der Hautoberfläche führen.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 1 wird die vorliegende Arbeit motiviert, die Aufgabenstellung erläutert und ein Überblick über den Inhalt der weiteren Kapitel gegeben. Die numerischen, physikalischen und medizinischen Grundlagen werden in den Kapiteln 2, 3 und 4 beschrieben. Die Ergebnisse der Arbeit finden sich in den Kapiteln 5, 6, 7 und 8.

In Kapitel 2 wird die Finite-Integrations-Technik als Methode zur Lösung elektro-thermodynamischer Probleme im menschlichen Körper vorgestellt. Dabei wird im einzelnen auf die Lösung der Maxwell-Gleichungen im Frequenzbereich, sowie der Biowärmeleitungsgleichung im Zeitbereich eingegangen. Zur Verkürzung der Rechenzeit des thermodynamischen Algorithmus wird eine adaptive Zeitschrittsteuerung vorgestellt. Danach wird die numerische Kopplung beider Verfahren vorgestellt und ein Überblick über das kommerzielle Softwarepaket MAFIA gegeben.

Die zur numerischen Lösung notwendigen dielektrischen Parameter von Körnergewebe und die zugehörigen grundlegenden physikalischen Wechselwirkungsmechanismen werden mit einem kurzen historischen Überblick in Kapitel 3 eingeführt. Es werden mathematische Modelle für die Beschreibung der Frequenzabhängigkeit dieser Parameter vorgestellt und ihre Frequenz- sowie Temperaturabhängigkeit diskutiert.

In Kapitel 4 wird auf die biologische Wirkung elektromagnetischer Felder eingegangen. Nach einer Definition grundlegender Begriffe werden die beiden bekannten Effekte - Stimulation und Erwärmung von Gewebe - aufgezeigt und die physikalischen Wechselwirkungen und ihre Auswirkung auf physiologischer Ebene dargestellt. Danach wird eine Einführung in die Ableitung von Grenzwerten gegeben, ausgehend von den physiologischen Gegebenheiten des menschlichen Körpers. Die heute gültigen Grenzwerte für elektromagnetische Felder und Ströme sowie für die Leistungsdeposition und Erwärmung von Gewebe im menschlichen Körper werden anschließend vorgestellt.

Die numerischen Voruntersuchungen werden in Kapitel 5 beschrieben. Dabei werden die Konvergenzeigenschaften unterschiedlicher Algorithmen im Frequenz- und Zeitbereich untersucht und Überlegungen zur Erstellung von Gitternetzen mit hochauflösten Modellen des menschlichen Körpers vorgestellt. Weiterhin werden Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf verschiedener Algorithmen ermittelt und dem Konvergenzverhalten gegenüber gestellt. Zur Lösung des thermodynamischen Problems werden die Ergebnisse von zwei Zeitintegrationsverfahren mit einer analytischen Lösung verglichen und bewertet. Im abschließenden Unterkapitel wird die Implementierung der adaptiven Zeitschrittsteuerung getestet und Vergleichsrechnungen mit gepulster und gemittelter Leistung einer HF-Quelle durchgeführt.

In Kapitel 6 werden die Ergebnisse der numerischen Berechnungen von HF-Feldern bei der MR-Tomographie auf den menschlichen Körper und auf implantierte Elektroden aufgezeigt. Hierbei wird zunächst eine eigene experimentelle Studie mit einem salzwassergefüllten Plexiglasphantom beschrieben und die Ergebnisse mit experimentellen Studien aus der Literatur verglichen. Danach folgt eine theoretische Betrachtung zur elektrischen Feldverteilung in quaderförmigen Salzwasserphantomen und daran anschließend die Konzeption und Ergebnisse einer numerischen Studie mit 384 einzelnen Modellen eines Phantoms mit inliegendem Kabel, ähnlich zur Applikation von Herzschrittmachern. Die Ergebnisse der numerischen Studie werden mit der Literatur verglichen und diskutiert. Danach wird eine numerische Studie mit einem hochauflösten Modell des menschlichen Kopfes mit Tiefenhirnstimulationselektrode und ein Oberkörpermodell mit Herzschrittmacherelektrode im MR-Tomographen vorgestellt. Das Kapitel schließt mit einer Diskussion und Bewertung der Ergebnisse im Vergleich zu Studien aus der Literatur.

Mit den Auswirkungen der magnetischen Gradientenfelder beschäftigt sich Kapitel 7. Nach einer Einführung in die Thematik werden zwei Gradientenpulsformen in eine Fourierreihe entwickelt. Anschließend wird ein numerisches Oberkörpermodell in einem Gradientenspulensystem vorgestellt und bei jeder harmonischen Frequenz das elektrodynamische Feldproblem gelöst und die Stromdichten im Körper bestimmt. Danach wird aufgezeigt, wie die Einzelergebnisse rekombiniert werden müssen, um den zeitlichen Verlauf der Stromdichte während eines Gradientenpulses zu ermitteln. Eine Bewertung über mögliche gesundheitliche Auswirkungen der betrachteten Pulsformen schließt das Kapitel ab.

In Kapitel 8 werden numerische Modelle zur Berechnung der Erwärmung der Hautoberfläche bei der Elektrochirurgie vorgestellt. Dabei wird zunächst in einem historischen Abriss ein Überblick über die Entwicklung von Neutralelektroden gegeben. Anhand einer Literaturstudie werden Ideen für neue Neutralelektronendesigns entwickelt. Danach wird ein Überblick über gängige Teststandards für Neutralelektroden gegeben. Im folgenden Unterkapitel werden die Ergebnisse der Modellrechnungen an einem Erwachsenenoberschenkelmodell aufgezeigt und diskutiert. Danach werden die Ergebnisse der Modellrechnungen einer Kleinkinderneutralelektrode präsentiert. Die Berechnungen werden durch einige theoretische Überlegungen bezüglich der zulässigen Grenzgröße bei einer Verkleinerung der Neutralelektrode ergänzt. Das Kapitel endet mit einer Diskussion und Zusammenfassung der Ergebnisse

Eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse der gesamten Arbeit erfolgt in Kapitel 9. Dort finden sich auch Anregungen zur Weiterarbeit in diesem Themengebiet.

In Anhang A finden sich mathematische Herleitungen zur Lösung der allgemeinen Wellengleichung, zur Berechnung des Absolutbetrages der komplexen Feldamplitude und zur Fourierreihenentwicklung von Gradientenpulsformen. In Anhang B werden in Übersichtstabellen die für die Simulationen notwendigen physikalischen und dielektrischen Gewebe- und Materialparameter angegeben.



# **Teil I**

# **GRUNDLAGEN**



---

## Kapitel 2

---

# Finite Integrationstechnik

---

### 2.1 Einführung

Der Begriff *numerische Feldrechnung* beinhaltet eine Vielzahl an Verfahren und Techniken zur Übersetzung physikalischer Probleme in Gleichungssysteme. Diese Verfahren lassen sich auf viele verschiedene Gleichungstypen und damit Problemstellungen anwenden. Am bekanntesten sind Anwendungen aus der Mechanik, der Elektrostatik und Elektrodynamik, sowie bei Problemen der Thermodynamik.

Die numerische Feldrechnung kommt dann zum Einsatz, wenn die Komplexität der betrachteten Strukturen, wie z. B. von hochaufgelösten inhomogenen Modellen des menschlichen Körpers und aktiven Implantaten, eine analytische Lösung der zugrunde liegenden Gleichungen nicht zulässt. In diesen Fällen stehen nur numerische Verfahren zur Auswahl, die eine näherungsweise Lösung erlauben. Die bekanntesten Vertreter sind:

- die Finite-Integrations-Technik
- das Finite-Differenzen-Verfahren
- die Finite-Elemente-Methode
- die Boundary-Elemente-Methode
- die Momenten-Methode
- die Ersatzladungsmethoden
- die Monte-Carlo-Methode.

Für die Lösung von numerischen Problemstellungen aus Bereichen der medizinischen Anwendung eignen sich mehrere dieser numerischen Näherungsverfahren. Dies sind insbesondere die Finite-Integrations-Technik, das Finite-Differenzen-Verfahren und die Finite-Elemente-Methode (FAIRES & BURDEN, 1994).

In dieser Arbeit wurde zur Lösung der Problemstellungen die Finite-Integrations-Technik gewählt, da sie zur Lösung verschiedener Feldgleichungen und damit Problemkategorien in voxelbasierten Datensätzen des menschlichen Körpers besonders gut geeignet ist. Die Wahl fiel auf das Finite-Integrations Programmpaket MAFIA (WEILAND ET AL., 1996), welches bereits ein leistungsfähiges Werkzeug zur Verfügung stellt, was die Integration komplexer Körpermodelle und die Berechnung von Problemen aus der medizintechnischen Praxis aus den unterschiedlichsten physikalischen Problemkategorien ermöglicht. Die einzelnen Lösermodule des Programm Paketes lassen sich beliebig koppeln und erlauben damit auch die Berechnung von komplexeren Vorgängen. Dazu zählen z. B. die getrennte Lösung hochfrequenter elektromagnetischer und thermodynamischer Vorgänge, die sich zur Lösung gekoppelter elektrodynamischer und thermodynamischer Felder verknüpfen lassen.

Im folgenden werden die Grundlagen der Finiten-Integrations-Technik zunächst am Beispiel der Maxwellschen Gleichungen aufgezeigt, die die Phänomene der Elektrostatik und der Elektrodynamik beschreiben. Es folgt eine kurze Einführung in die Ableitung einer elektrodynamischen Systemgleichung zur Berechnung der Feldverteilung im eingeschwungenen Zustand bei sinusförmiger Feldanregung. Weiterhin werden die Berücksichtigung verlustbehafteter Materialien, verschiedener Randbedingungen und die Verfahren zur Lösung großer Gleichungssysteme angesprochen.

Danach werden die grundlegenden Gleichungen für den Wärmetransport in biologischen Geweben zur Lösung thermodynamischer Probleme im menschlichen Körper eingeführt und aufgezeigt, wie auch diese Problemstellung mit der Finiten-Integrations-Technik behandelt werden kann. Im Gegensatz zur Lösung von eingeschwungenen Zuständen im Frequenzbereich werden die thermodynamischen Probleme mit verschiedenen Zeitschrittverfahren gelöst, deren Grundlagen in eigenen Abschnitten vorgestellt werden. Mit Hilfe der darauf diskutierten adaptiven Zeitschrittsteuerung für den thermodynamischen Löser ist eine effiziente Verkürzung der Rechenzeiten bei Lösung thermodynamischer Probleme möglich.

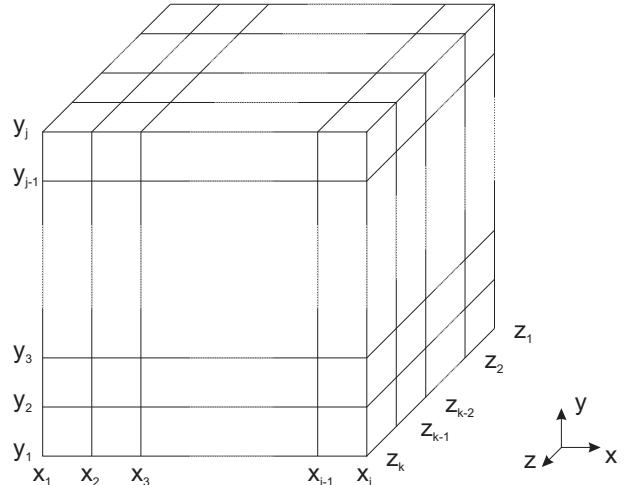
Darauf folgt eine Beschreibung der Möglichkeiten, wie sich die Berechnung elektrodynamischer Verluste in leitfähigen dielektrischen Materialien mit dem thermodynamischen Lösungsverfahren koppeln lässt, um so genauere Aussagen über den zeitlichen Verlauf von Erwärmungen durch elektromagnetische Hochfrequenzfelder zu erhalten. Mit einer kurzen Gesamtübersicht über das Programmpaket MAFIA wird das Kapitel abgeschlossen.

## 2.2 Ableitung der Gitter-Maxwell-Gleichungen

In den folgenden Abschnitten dieses Unterkapitels werden die Grundzüge der Finiten-Integrations-Technik erläutert und ausführlich am Beispiel der Ableitung der Maxwell-Gleichung gezeigt. Das vorgestellte Verfahren lässt sich nicht nur auf die Maxwell-Gleichungen anwenden, sondern steht für viele andere Feldprobleme zur Verfügung. Dies wird in einem der folgenden Unterkapitel anhand einer grundlegenden thermodynamischen Gleichung gezeigt.

Zunächst werden in einer Formelsammlung die Maxwell-Gleichungen in differentieller sowie integraler Form und die Materialgleichungen angegeben. Der Umsetzung in die Gitter-Maxwell-Gleichungen und die Gitter-Material-Gleichungen wird in den darauf folgenden zwei Abschnitten gezeigt. Eine Darstellung der grundlegenden Eigenschaften der Gitter-Maxwell-Gleichung im Vergleich zu den originalen Maxwell-Gleichungen schließt das Unterkapitel ab.

**Abbildung 2.1:** Grundlegendes Beispiel für ein Gitternetz  $\mathcal{G}$  in kartesischen Koordinaten. Die einzelnen Koordinatenachsen sind linear durchnummert. Das zu untersuchende Volumen wird mit einem Gitternetz überzogen. Die Gitterschrittweite kann hierbei variabel gestaltet werden. Jeder entstehenden Elementargitterzelle können unterschiedliche Materialeigenenschaften zugewiesen werden. So können komplexe und inhomogene Strukturen approximiert werden.



### 2.2.1 Die Maxwell-Gleichungen

Alle makroskopischen elektromagnetischen Effekte lassen sich durch die vier Maxwellschen Gleichungen beschreiben, die als physikalische Größen die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$ , die elektrische Verschiebungsdichte  $\vec{D}$ , die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$ , die magnetische Flußdichte  $\vec{B}$ , die Stromdichte  $\vec{J}$  und die elektrische Raumladungsdichte  $\rho_e$  enthalten. Diese vier Gleichungen sind sowohl in differentieller als auch in äquivalenter integraler Form darstellbar:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \Leftrightarrow \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho_e dV \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 . \quad (2.4)$$

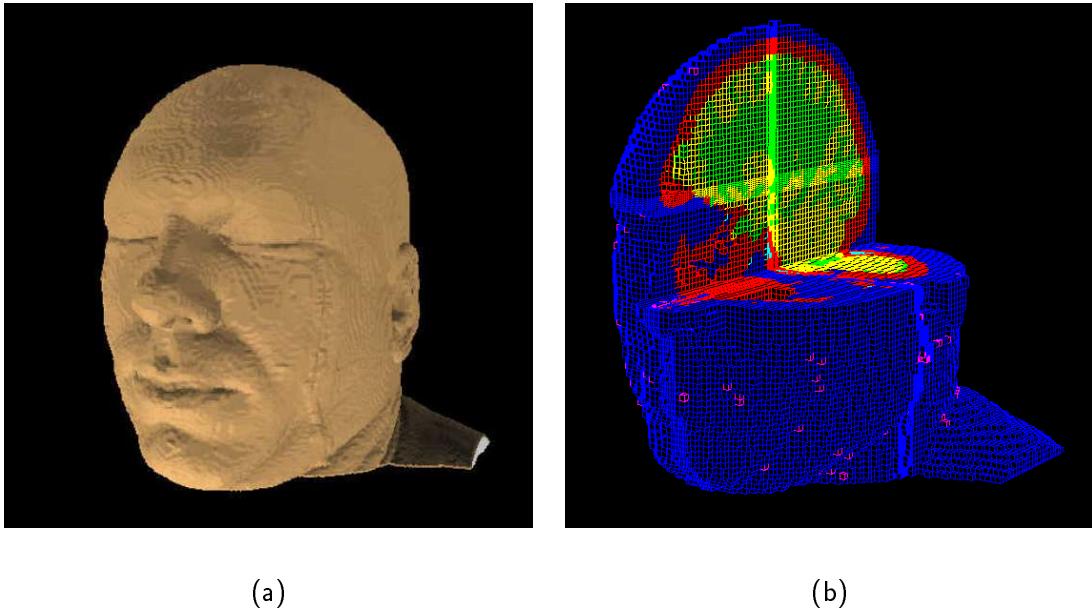
Diese vier Gleichungen werden durch drei Materialgleichungen ergänzt, durch die die elektromagnetischen Feldgrößen miteinander verknüpft werden. Geht man von linearen, isotropen und hysteresefreien Medien aus und nimmt zeit- und frequenzinvariante Materialeigenschaften an, so ergeben sich:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_e . \quad (2.7)$$

Die Größen  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  stellen hierbei die elektrische und die magnetische Feldkonstante dar. Die Größen  $\epsilon_r$  und  $\mu_r$  geben die relative Permittivität und Permeabilität des Materials an. Die Größe



**Abbildung 2.2:** Beispiel für die räumliche Diskretisierung eines komplexen inhomogenen Körpermodells. Ausgehend von dem Kopfteil eines segmentierten Datensatzes (a) wird das zu untersuchende Raumgebiet mit einem Gitternetz überzogen und das Körpermodell in unterschiedlich große Elementarzellen aufgeteilt. Die einzelnen Koordinatenachsen werden dabei linear durchnummierter. So sind lokale Verfeinerungen möglich wie in der Mitte des Gehirns in Bild (b) zu sehen sind. Zur Verdeutlichung wurde ein Teil des Kopfmodells in Bild (b) ausgeschnitten.

$\sigma$  beschreibt die elektrische Leitfähigkeit. Die Gesamtstromdichte  $\vec{J}$  wird durch eine eingeprägte elektrische Stromdichte  $\vec{J}_e$  ergänzt.

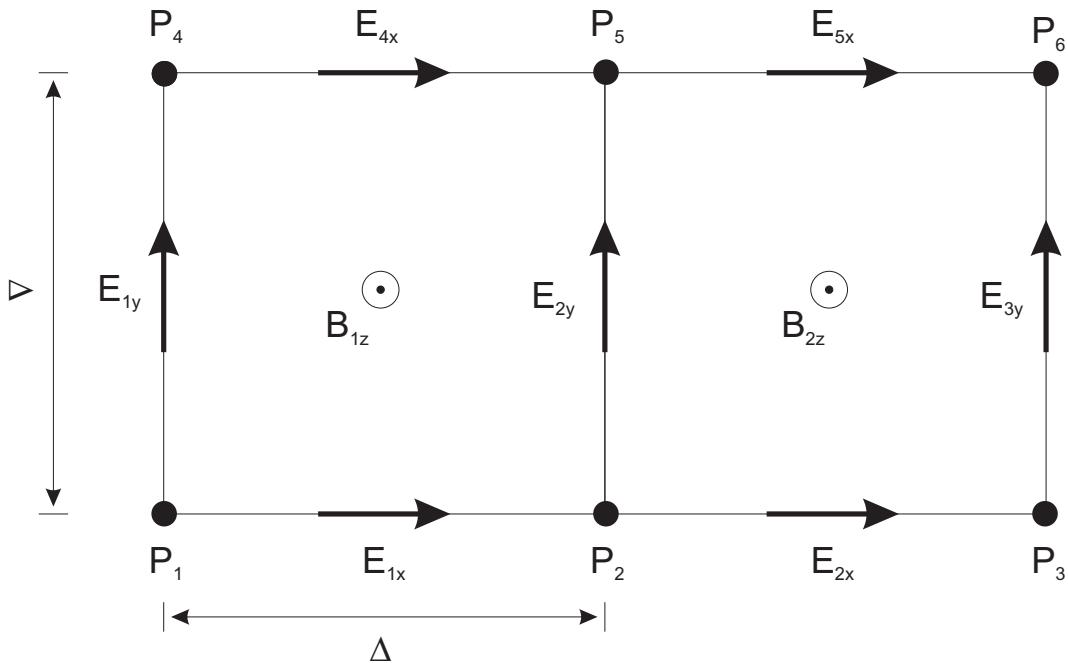
Die zu untersuchende Struktur wird mit einem Gitternetz  $\mathcal{G}$  überzogen. Dieser Schritt wird *räumliche Diskretisierung* genannt. Hierbei wird das Rechengebiet in eine endliche Anzahl kleiner Teilvolumina aufgeteilt. Jeder einzelnen Gitterzelle können beliebige anisotrope Materialeigenschaften zugeordnet werden. Dadurch lassen sich beliebig geformte Strukturen näherungsweise darstellen. Abbildung 2.1 zeigt die prinzipielle Gitterstruktur anhand eines einfachen kartesischen Gitters. Abbildung 2.2 zeigt die räumliche Diskretisierung am Beispiel eines komplexen inhomogenen Körpermodells.

### 2.2.2 Die Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen

Bei dem Verfahren der Finiten-Integrations-Technik werden die Maxwellschen Gleichungen in Integralform in entsprechende Matrizengleichungen umgewandelt und dabei die Integrale durch Näherungsausdrücke ersetzt. Dabei wird der Lösungsraum der Maxwellschen Gleichungen auf einen  $n$ -dimensionalen Raum abgebildet<sup>1</sup>. Der Vorteil dieser Methode ist, dass die Eigenschaften der Lösungen der Maxwell-Gleichungen erhalten bleiben. Für die Rotations-, Divergenz- und Gradientenoperatoren ergeben sich dabei analoge Ausdrücke im diskreten Lösungsraum. Im

---

<sup>1</sup> $n$  stellt hierbei die Gesamtzahl der zu berechnenden Feldstärkewerte dar



**Abbildung 2.3:** Oberfläche von zwei Elementargitterzellen in einem kubischen Gitter mit der Kantenlänge  $\Delta$ . Die Komponenten des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  sind tangential auf die einzelnen Gitterkanten verteilt und zwischen den Knotenpunkten  $P$  als konstant angenommen. Die Komponenten der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  stehen senkrecht auf den Elementarflächen und bilden so ein duales Gitter  $\mathcal{G}$ . Als Näherung wird die magnetische Flussdichte durch eine Elementarfläche über die gesamte Fläche als konstant angenommen.

folgenden wird diese Methode kurz skizziert und an einem Beispiel erläutert. Im Anschluss daran finden sich einige weiterführende Literaturhinweise.

Die Finite-Integrations-Technik erlaubt eine Vielzahl an möglichen Gitterstrukturen und ist nicht nur auf zwei- oder dreidimensionale kartesische Gitter beschränkt, so sind z. B. auch kreiszylindrische Gitter möglich. Im folgenden werden aber ausschließlich Probleme in kartesischen Gittern betrachtet.

Zum besseren Verständnis der Methode beschränken sich die folgenden Betrachtungen auf kubische Gitter. Ausgangspunkt für die beispielhafte Ableitung der Gitter-Maxwell-Gleichungen der Finiten-Integrations-Technik ist die erste Maxwell-Gleichung in Integralform:

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} .$$

Die linke Seite dieser Gleichung besteht aus einem Linienintegral über die elektrische Feldstärke entlang eines geschlossenen Weges. In dem hier betrachteten Gitternetz  $\mathcal{G}$  stellt der elementare Weg gerade den Umfang einer Seitenfläche einer Gitterzelle dar (vgl. Abbildung 2.3). Die Integrationsfläche des Oberflächenintegrals auf der rechten Seite der Gleichung ist bereits durch den Integrationsweg auf der linken Seite der Gleichung festgelegt, im hier betrachteten Fall die Seitenfläche einer Elementarzelle.

Durch geschickte Zuweisung der Komponenten des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  auf die einzelnen Linien des Gitternetzes kann das Linienintegral der ersten Maxwell-Gleichung angenähert werden. Hierbei werden die Komponenten des elektrischen Feldes der einzelnen Gitterpunkte auf den Kanten der Elementarzellen des Gitters  $\mathcal{G}$  definiert. Die Komponenten von  $\vec{E}$  werden hierbei tangential auf den Gitterkanten des Gitters  $\mathcal{G}$  angeordnet. Abbildung 2.3 zeigt in einer Draufsicht die Oberfläche von zwei Elementarzellen. Jedem Gitterpunkt  $P$  sind jeweils drei Kanten<sup>2</sup> für das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte zugeordnet. Hierbei wird angenommen, dass die jeweilige Feldstärke sich entlang einer Kante zwischen zwei Punkten nicht ändert, also konstant ist, was neben der räumlichen Diskretisierung eine weitere Näherung darstellt. Mathematisch lässt sich diese Näherung für ein beliebiges Wegintegral ausdrücken als (BRONŠTEJN & SEMENDJAEV, 1991):

$$\int_{s_0}^{s_0 + \Delta} f(s) \cdot d\vec{s} = \Delta \cdot f(s_0 + \frac{\Delta}{2}) + O(\Delta^2) . \quad (2.8)$$

Der Vorteil dieses Ansatzes ist, dass die im Gitternetz berechnete tangentiale Feldstärke an den Materialoberflächen immer stetig ist. So kann in jeder Elementarzelle eine unterschiedliche Permittivität  $\varepsilon_r$  zugelassen werden. Es ist einsichtig, dass die Berechnung aller drei Feldkomponenten an einer Stelle im Gitter zu mehrdeutigen Feldkomponenten führen würde, sollten diese senkrecht auf einem Übergang zwischen zwei Materialien mit unterschiedlichen Permittivitäten stehen. Durch die hier geschilderte geschickte Verteilung der einzelnen Feldkomponenten auf die Gitterkanten werden diese Probleme vermieden.

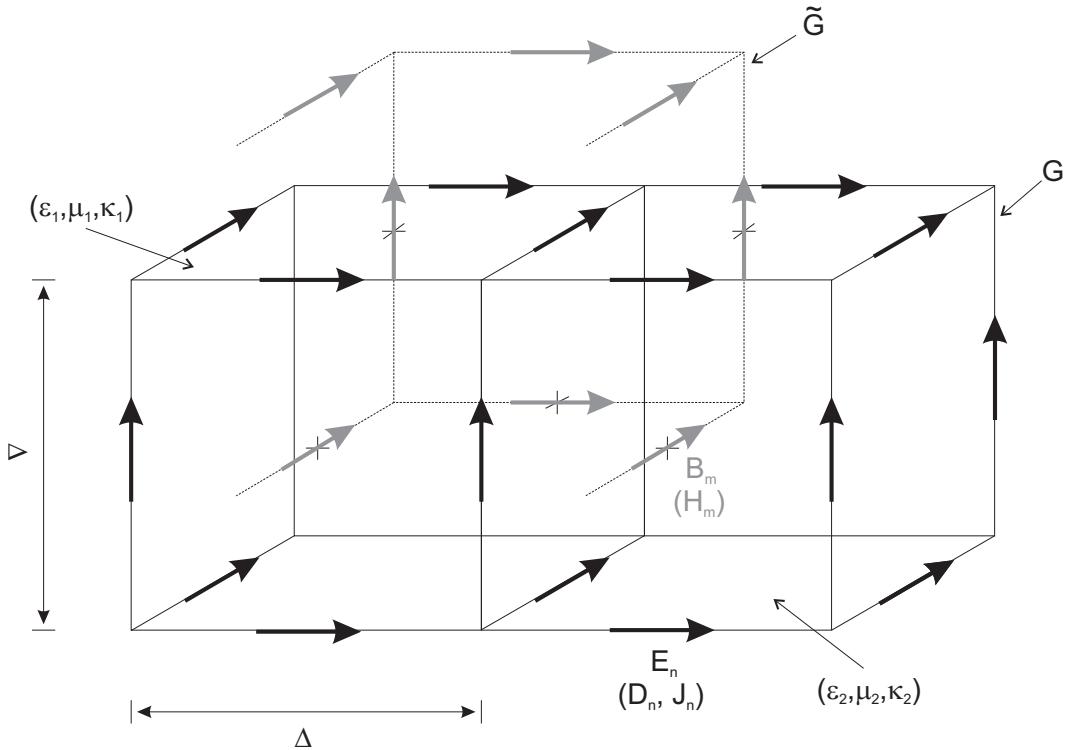
Aus dem Linienintegral wird dann unter Vernachlässigung der höheren Ordnungen  $O(\Delta^2)$  ein normales Produkt aus der Länge der einzelnen Gitterkanten  $\Delta$  mit den zugehörigen Komponenten der elektrischen Feldstärke, welches eine elektrische Spannung entlang einer Kante darstellt. Ausgehend von der Anordnung der einzelnen Komponenten nach Abbildung 2.3 ergibt sich für die beiden Elementarflächen folgender algebraischer Ausdruck:

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Delta \cdot (E_{1x} + E_{2y} - E_{4x} - E_{1y}) \\ \Delta \cdot (E_{2x} + E_{3y} - E_{5x} - E_{2y}) \end{pmatrix} . \quad (2.9)$$

Diese Umwandlung des Linienintegrals wird auf dem ganzen Gitter durchgeführt. Es ist möglich die algebraische Lösung in zwei Matrizen und einen Vektor aufzuteilen indem man die geometrischen Daten der untersuchten Struktur in eine Matrix überführt, sowie die Vorzeichen der einzelnen elektrischen Feldkomponenten in einer zweiten Matrix aufnotiert. Die Komponenten der elektrischen Feldstärke lassen sich dann in einem Lösungsvektor angegeben und man erhält einen Teil der ersten *Gitter-Maxwell-Gleichung*. Wird dies an der Gleichung (2.9) durchgeführt, so erhält man:

---

<sup>2</sup>Bei dieser Zuordnung der Gitterkanten zu den einzelnen Knotenpunkten stehen für einige Knoten am Rand des Gitters nicht ausreichend Kanten zur Verfügung. Hier wird einfach das Gitter um eine Schrittweite erweitert. Die so entstehenden Knoten und die überschüssigen Kanten werden nicht weiter berücksichtigt.



**Abbildung 2.4:** Zusätzlich zum Gitter  $\mathcal{G}$ , welches auf den Kanten die Komponenten  $E_n$  der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  trägt (schwarze Pfeile) kann ein duales Gitter  $\tilde{\mathcal{G}}$  definiert werden. Auf den Kanten von  $\tilde{\mathcal{G}}$  werden die Komponenten  $B_m$  der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  definiert (graue Pfeile). Die Kanten des dualen Gitters sind koordinatenachsenparallele Linien durch die Schwerpunkte aller Seitenflächen des Gitters  $\mathcal{G}$ . In jeder Elementarzelle können anisotrope Materialeigenschaften definiert werden. Die Anordnung der Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  stellt sicher, dass nur stetige Größen berechnet werden. In Klammern ist die Anordnung der drei anderen betrachteten Feldgrößen angegeben. Das sind im einzelnen die Verschiebungsstromdichte  $D$  und Leitungsstromdichte  $J$ , die wie das elektrische Feld auf den Gitterkanten des Gitter  $\mathcal{G}$  angeordnet sind und das magnetische Feld  $\vec{H}$ , dessen Komponenten auf dem dualen Gitter  $\tilde{\mathcal{G}}$  liegen. (Aus Gründen der Übersichtlichkeit fehlen einige schwarze Pfeile und das duale Gitter ist nur angedeutet.)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta & 0 & \dots \\ 0 & \Delta & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_s} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{2x} \\ E_{2y} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\vec{e}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \vec{e}. \quad (2.10)$$

Die Matrizen  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}_s$  sind von der Ordnung  $3n \times 3n$  und ebenso der Vektor  $\vec{e}$ , wenn das gesamte dreidimensionale Gitter aus  $n$  einzelnen Knoten  $P$  besteht.

Eine analoge Aussage kann für die Feldkomponenten der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  gemacht werden. Sie wird nur durch Komponenten repräsentiert, die senkrecht auf den Oberflächen der einzelnen Zellen des Gitters  $\mathcal{G}$  stehen. Als Näherung wird die magnetische Flussdichte an jedem Punkt der betrachteten Elementarfläche als konstant angenommen. Für das Oberflächenintegral über eine konstante Funktion  $f(x, y, z) = S$  über eine quadratische Fläche mit der Kantenlänge  $\Delta$  kann dann folgende Näherung angegeben werden:

$$\int_A S \cdot dA = \Delta^2 \cdot S + O(\Delta^4) . \quad (2.11)$$

Aus dem Oberflächenintegral wird dann unter Vernachlässigung höherer Ordnungen  $O(\Delta^4)$  ein Produkt aus dem Flächeninhalt  $\Delta^2$  der betrachteten Gitterzelle mit der als konstant angenommenen magnetischen Flussdichte durch diese Fläche. Dies erlaubt die Füllung jeder Elementarzelle mit einem Material verschiedener Permeabilität.

Durch diese Anordnung der *magnetischen* Flussdichtekomponenten wird ein zweites Gitternetz, das sogenannte *duale Gitter*  $\tilde{\mathcal{G}}$  erzeugt, dessen Kanten durch die Mittelpunkte aller Seitenflächen des Gitters  $\mathcal{G}$  parallel zu den Gitterlinien verlaufen. Im dualen Gitter  $\tilde{\mathcal{G}}$  sind die Komponenten von  $\vec{B}$  genauso angeordnet wie die Komponenten des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  im Gitter  $\mathcal{G}$ . Abbildung 2.4 veranschaulicht dieses Konzept.

Berücksichtigt man die Verteilung der Feldkomponenten gemäß Abbildung 2.3 so kann mit Hilfe von Gleichung (2.11) die rechte Seite der ersten Maxwell-Gleichung umgeformt werden:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}}_{\mathbf{D}_A} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta^2 & 0 & \dots \\ 0 & \Delta^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_A} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} B_{1z} \\ B_{2z} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\vec{b}} = \mathbf{D}_A \cdot \dot{\vec{b}} . \quad (2.12)$$

Die Gleichungen (2.10) und (2.12) können zu einer einzigen Matrixgleichung zusammengefasst werden:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \vec{e} = -\mathbf{D}_A \cdot \dot{\vec{b}} . \quad (2.13)$$

Diese Gleichung ist die erste Maxwellgleichung in ihrer dreidimensionalen Gitterdarstellung. Die Matrix  $\mathbf{C}$  ist eine Matrix auf dem  $3n \times 3n$ -dimensionalen Vektorraum der elektrischen Feldstärke im Gitter  $\mathcal{G}$  und stellt dort den Rotationsoperator dar. Dies ergibt sich in Analogie zu der ersten Maxwellgleichung in differentieller Form (2.1). Diese Matrix enthält nur die Komponenten 0, 1 und  $-1$ .

Die Matrix  $\mathbf{D}_s$  ist ebenfalls  $3n \times 3n$ -dimensional und enthält die Längen der einzelnen Kanten der Elementarzellen auf denen die elektrischen Feldkomponenten definiert sind. Diese Matrix ist eine reine Diagonalmatrix.

Die Matrix  $\mathbf{D}_A$  ist ebenfalls eine  $3n \times 3n$ -dimensionale Diagonalmatrix und enthält die Flächeninhalte der einzelnen Elementarzellen.

Die zweite Gitter-Maxwell-Gleichung erhält man analog zu (2.13). Dabei ist wiederum auf der linken Seite ein Linienintegral analog zu (2.9) auszuwerten. Der Unterschied hierbei ist aber,

dass diesmal das Linienintegral entlang der dualen Gitterkanten von  $\tilde{\mathcal{G}}$  berechnet werden muss. Die Leitungsstromdichte  $\vec{J}$  und die Verschiebungsstromdichte  $\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$  liegen wie die Komponenten des elektrischen Feldes auf den Kanten des Gitters  $\mathcal{G}$  und stoßen damit durch die Flächen der Elementarzellen des dualen Gitters  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Es ergibt sich eine zu Gleichung (2.13) sehr ähnliche Matrixgleichung, die aber nun Matrizenoperatoren enthält, die auf dem dualen Gitter definiert sind. Diese werden ebenfalls mit einer hochgestellten Tilde wie z. B. das duale Gitter  $\tilde{\mathcal{G}}$  gekennzeichnet:

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_s \cdot \vec{h} = \tilde{\mathbf{D}}_A \cdot (\vec{j} + \dot{\vec{d}}) . \quad (2.14)$$

Die Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}$  ist  $3n \times 3n$ -dimensional und stellt den dualen Rotationsoperator dar. Er ergibt sich durch einfaches Transponieren der Matrix  $\mathbf{C}$ .

Die Matrizen  $\tilde{\mathbf{D}}_s$  und  $\tilde{\mathbf{D}}_A$  enthalten analog zu den Matrizen  $\mathbf{D}_s$  und  $\mathbf{D}_A$  die Längen und Flächeninhalte der Elementarzellen und sind ebenfalls  $3n \times 3n$ -dimensional.

Auf die gleiche Art und Weise erhält man die dritte und die vierte Gitter-Maxwell-Gleichung. Um die Oberflächenintegrale auf der linken Seite zu lösen wird gemäß Gleichung (2.11) unter Vernachlässigung höherer Ordnungen eine Summe über die sechs Elementarflächen einer Gitterzelle gebildet, die aus den Produkten des Flächeninhaltes mit der jeweils als konstant angenommenen Verschiebungsstromdichten und magnetischen Flussdichten durch eine Elementarfläche besteht. Dabei ist zu beachten, dass die Verschiebungsstromdichte  $\vec{D}$  in der dritten Maxwell-Gleichung senkrecht auf den Elementarflächen des dualen Gitters  $\tilde{\mathcal{G}}$  steht und daher im Gegensatz zur vierten Maxwell-Gleichung duale Matrizenoperatoren zu definieren sind:

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho_e dV \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_A \cdot \vec{d} = \tilde{\mathbf{D}}_V \cdot \vec{q}_e \quad (2.15)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_A \cdot \vec{b} = \mathbf{0} . \quad (2.16)$$

Die Matrizen  $\mathbf{S}$  und  $\tilde{\mathbf{S}}$  stellen in Analogie zur differentiellen Form der dritten (2.3) und vierten Maxwell-Gleichung (2.4) den diskreten Divergenzoperator dar und sind mit den Zahlen 0, 1 und -1 nur dünn besetzt. Die Matrix  $\tilde{\mathbf{D}}_V$  enthält analog zu den Matrizen  $\tilde{\mathbf{D}}_A$  und  $\tilde{\mathbf{D}}_s$  geometrische Informationen über die einzelnen dualen Gitterzellen (hier das Volumen  $\Delta^3$  im betrachteten kubischen Gitter).

### 2.2.3 Die Diskretisierung der Materialgleichungen

Die zweite Gitter-Maxwell-Gleichung führt direkt zu einer genaueren Betrachtung der Materialgleichungen. Auf der linken Seite von Gleichung (2.2) muss das Linienintegral über die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  im dualen Gitter bestimmt werden. Da auf den dualen Gitterkanten jedoch die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  definiert ist, muss dort das magnetische Feld durch den Quotienten aus der Flussdichte und der Permeabilität ersetzt werden. Die rechte Seite der Gleichung beschreibt die Verschiebungsstromdichte und die Stromdichte auf den Elementarflächen des dualen Gitters. Dazu ist es notwendig die Verschiebungsstromdichte  $\vec{D}$  aus dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  mit

der Permittivität der einzelnen Materialien zu berechnen. Dadurch werden neue Matrizentypen definiert, die die Materialeigenschaften enthalten. Die Materialgleichungen in der ursprünglichen Form und der dazugehörigen Gitter-Matrix-Form lauten dann:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \Leftrightarrow \vec{d} = \mathbf{M}_\varepsilon \cdot \vec{e} \quad (2.17)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \Leftrightarrow \vec{b} = \mathbf{M}_\mu \cdot \vec{h} \quad (2.18)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_e \Leftrightarrow \vec{j} = \mathbf{M}_\sigma \cdot \vec{e} + \vec{j}_e . \quad (2.19)$$

Die Matrizen  $\mathbf{M}_\varepsilon$ ,  $\mathbf{M}_\mu$  und  $\mathbf{M}_\sigma$  sind  $3n \times 3n$ -dimensionale Diagonalmatrizen, die die Permittivitäten, Permeabilitäten und die Leitfähigkeiten der einzelnen Elementarzellen enthalten. Der Vektor  $\vec{j}_e$  enthält die eingeprägte Stromdichte.

Wenn für die Größen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in erster Näherung gilt, dass die elektrische Feldstärke entlang einer Gitterkante und die magnetische Flussdichte auf einer Gitterfläche konstant ist, so wird deutlich, dass dies bei den drei übrigen Feldgrößen  $\vec{D}$ ,  $\vec{J}$  und  $\vec{H}$  aufgrund der Materialgleichungen nicht immer gilt. Dies ist dann der Fall, wenn an den Gitterkanten Zellen mit unterschiedlichen Materialeigenschaften  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  oder  $\mu$  zusammentreffen, da jede Zelle des Gitters  $\mathcal{G}$  unterschiedliche Materialien enthalten darf.

Bei der Beschreibung der Materialgleichungen müssen daher Näherungen verwendet werden. Diese Näherungen können beliebig komplex sein. Hier wird eine einfache Lösung vorgestellt, bei der zwischen den beiden Mittelpunkten der Gitterzellen mit unterschiedlichen Materialparametern ein linearer Verlauf der Materialeigenschaften angenommen wird. Dadurch werden die kritischen Feldgrößen stetig. Die Matrizen  $\mathbf{M}_\varepsilon$ ,  $\mathbf{M}_\mu$  und  $\mathbf{M}_\sigma$  werden dann in den folgenden Gleichungen durch die Näherungsmatrizen  $\mathbf{D}_\varepsilon$ ,  $\mathbf{D}_\mu$  und  $\mathbf{D}_\sigma$  ersetzt. Eine ausführliche Darstellung zur Ableitung und Berechnung dieser Näherungsmatrizen findet sich bei HAHNE (1992), die durch weitere Ausführungen von PINDER (1998) ergänzt wird.

#### 2.2.4 Eigenschaften der Gitter-Maxwell-Gleichungen

Eine besondere Eigenschaft der aufgestellten Gitter-Maxwell-Gleichung ist, dass die analytischen Eigenschaften der Lösungen im diskreten Raum eine äquivalente Beziehung zueinander besitzen (THOMA, 1997). Ein Wirbelfeld ist stets quellenfrei, d.h.  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \equiv 0$ . Dies gilt auch im diskreten Raum in Form von:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{C} \equiv \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \equiv \mathbf{0} . \quad (2.20)$$

Weiterhin lässt sich zeigen, dass im Gitterraum ein Potentialfeld stets wirbelfrei ist, d. h.  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi \equiv 0$ . Dazu sind aber die Matrizen  $\mathbf{S}$  und  $\tilde{\mathbf{S}}$  zu transponieren und stellen so die diskreten Gradientenoperatoren  $-\mathbf{S}^T$  und  $-\tilde{\mathbf{S}}^T$  dar (WEILAND, 1987). Diese werden benötigt, um statische Probleme der Form  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$  zu lösen, bei denen die skalaren Potentiale  $\Phi$  auf den einzelnen Knotenpunkten  $P$  des Gitters  $\mathcal{G}$  definiert sind (siehe auch Abbildung 2.3). Die diskrete Potentialgleichung ergibt sich dann als:

$$\vec{e} = -\tilde{\mathbf{S}}^T \cdot \Phi . \quad (2.21)$$

Es lässt sich im diskreten Raum zeigen, dass Potentialfelder wirbelfrei sind (THOMA, 1997):

$$\mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{S}}^T \equiv \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{S}^T \equiv \mathbf{0} . \quad (2.22)$$

Zusätzlich zu diesen Eigenschaften ist noch die sogenannte Dualitätsrelation zu erwähnen. Die Identität (2.22) ergibt sich augenscheinlich einfach durch Transponierung der Gleichung (2.20). Dadurch lässt sich nach THOMA UND WEILAND (1998) ableiten, dass die dualen Operatoren gerade durch Transponierung der normalen Operatoren erhalten werden. Allgemein gilt dann im diskreten Raum:

$$\mathbf{C} \equiv \tilde{\mathbf{C}}^T . \quad (2.23)$$

Um die Gitter-Maxwell-Gleichungen zu lösen, werden die Gleichungen je nach Anwendungsfall mit Hilfe von Matrizenoperationen zusammengefasst, um so einfache Gleichungen zu erstellen. Diese Umformungen finden auf dem Gitterraum  $\mathcal{G}$  und  $\tilde{\mathcal{G}}$  statt.

### 2.2.5 Vorteile der Finiten-Integrations-Technik

Der Vorteil, der sich bei Anwendung der Finiten-Integrations-Technik ergibt, liegt zum einen an der Tatsache, dass bei der Ableitung der Gittergleichungen keinerlei Einschränkungen der Allgemeinheit notwendig waren. Weder die Materialverteilung noch die Zeitabhängigkeit sind eingeschränkt. Dies ermöglicht die Anwendung der Finiten-Integrations-Technik bei vielen unterschiedlichen Problemklassen, auch über die Maxwell-Gleichungen hinaus, wie in einem anderen Anwendungsfall weiter unten gezeigt wird.

Sicherlich ist das hier beschriebene Verfahren nicht das einzige mögliche Diskretisierungsverfahren. Es scheint sogar zunächst einfacher, alle sechs Feldkomponenten an den einzelnen Gitterknotenpunkten zu definieren. Dies führt sogar zu einfacheren Matrixgleichungen. Allerdings gibt es hierbei - wie bereits oben erwähnt - Probleme mit unstetigen Feldkomponenten an Materialübergängen, die diesen Diskretisierungsansatz scheitern lassen.

Mehr Informationen über die Grundlagen der hier vorgestellten Finiten-Integrations-Technik finden sich bei WEILAND (1977). Eine sehr ausführliche Darstellung in deutscher Sprache findet man in dieser Arbeit von WEILAND (1987). Die Entwicklung des Softwarepaketes MAFIA beruht auf zahlreichen Dissertationen, die am Fachbereich für Elektrotechnik und Informationstechnik der Universität Darmstadt durchgeführt worden sind.

Im folgenden wird eine Auswahl aus diesen Dissertationen zu speziellen Fragestellungen gegeben, die die verwendeten numerischen Lösealgorithmen beschreiben. Bei DOHLUS (1992) finden sich Darstellungen zur Lösung der Maxwell-Gleichungen im Zeitbereich, die in der Arbeit von THOMA (1997) weitergeführt werden. Mit kreiszylindrischen Gittern beschäftigt sich die Arbeit von DEHLER (1994). Probleme im Frequenzbereich betrachtet die Dissertation von HAHNE (1992). Eine umfassende Darstellung zur Lösung gekoppelter elektromagnetischer und thermodynamischer Felder findet sich in der Arbeit von PINDER (1998).

## 2.3 Die Gitter-Maxwell-Gleichungen im Frequenzbereich

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, wie die Gitter-Maxwell-Gleichungen kombiniert und umgeformt werden können. Diese Umformungen dienen dazu, eine Systemgleichung abzuleiten mit der sich eingeschwungene elektrische Felder bei sinusförmiger Feldanregung berechnen lassen. Die mathematische Darstellung vereinfacht sich erheblich durch Einführung komplexer Feldgrößen, was im nächsten Abschnitt demonstriert wird.

### 2.3.1 Ableitung der diskreten Systemgleichung

Bei sinusförmiger Feldanregung können im eingeschwungenen Zustand alle zeitabhängigen Größen durch ihre komplexe Amplitude wiedergegeben werden:

$$f(t) = \Re \{ \underline{f} \cdot e^{j\omega t} \} = f_{\text{Am}} \cdot \cos(\omega t + f_{\text{Ph}}) . \quad (2.24)$$

Die Amplitude  $f_{\text{Am}}$  und Phase  $f_{\text{Ph}}$  einer komplexen Funktion  $\underline{f}$  ergibt sich nach BRONŠTEJN UND SEMENDJAEV (1991) aus:

$$f_{\text{Am}} = \sqrt{\Re \{ \underline{f} \}^2 + \Im \{ \underline{f} \}^2} \quad (2.25)$$

$$f_{\text{Ph}} = \varphi = \arctan \frac{\Im \{ \underline{f} \}}{\Re \{ \underline{f} \}} \quad (2.26)$$

Die Zeitableitung  $\partial/\partial t$  geht in diesem Fall über in eine Multiplikation mit dem term  $j\omega$ , da gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) = \Re \{ j\omega \cdot \underline{f} \cdot e^{j\omega t} \} = f_{\text{Am}} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + f_{\text{Ph}}) . \quad (2.27)$$

Ersetzt man in den ersten beiden Gitter-Maxwell-Gleichungen (2.13) und (2.14) alle Felder durch die jeweiligen komplexen Amplitudenvektoren (z. B.  $\vec{e} \Rightarrow \underline{e}$ ) und berücksichtigt den Übergang der Zeitableitung in eine einfache Multiplikation mit  $j\omega$ , so erhält man unter Einbeziehung der diskreten Materialgleichungen folgendes Gleichungssystem:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \vec{\underline{e}} = -j\omega \cdot \mathbf{D}_A \cdot \vec{\underline{b}} \quad (2.28)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_s \cdot \mathbf{D}_\mu^{-1} \cdot \vec{\underline{b}} = \tilde{\mathbf{D}}_A \cdot \left( \mathbf{D}_\sigma \cdot \vec{\underline{e}} + \vec{\underline{j}}_e + j\omega \cdot \mathbf{D}_\varepsilon \cdot \vec{\underline{e}} \right) . \quad (2.29)$$

Setzt man Gleichung (2.28) in Gleichung (2.29) ein, so erhält man die sogenannte *diskrete Curl-Curl-Gleichung*:

$$\left( \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_s \cdot \mathbf{D}_\mu^{-1} \cdot \mathbf{D}_A^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_s + j\omega \cdot \tilde{\mathbf{D}}_A \cdot \mathbf{D}_\sigma - \omega^2 \cdot \tilde{\mathbf{D}}_A \cdot \mathbf{D}_\varepsilon \right) \cdot \vec{\underline{e}} = -j\omega \cdot \tilde{\mathbf{D}}_A \cdot \vec{\underline{j}}_e . \quad (2.30)$$

Diese Gleichung entspricht folgender analytischen Gleichung mit komplexen Feldgrößen, die ebenfalls aus der ersten und der zweiten Maxwell-Gleichung abgeleitet werden kann (BECKER ET AL., 1994):

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \underline{\underline{E}}) - \omega^2 \varepsilon \underline{\underline{E}} + j\omega \sigma \underline{\underline{E}} = -j\omega \underline{\underline{J}}_e . \quad (2.31)$$

Der Name *Curl-Curl* liegt in dem doppelten Rotationsoperator (Englisch: Curl) auf der linken Seite von Gleichung (2.31) begründet.

Verschwindet die rechte Seite von Gleichung (2.30), d.h. wird im betrachteten Volumen kein Strom eingeprägt, so beschreibt diese Gleichung ein algebraisches Eigenwertproblem. Im folgenden werden jedoch nur Probleme mit eingeprägten Strömen behandelt, so dass sich die weitere Betrachtung auf den inhomogenen Fall von Gleichung (2.30) beschränkt.

Gleichung (2.30) beschreibt ein komplexes lineares Gleichungssystem mit symmetrischer Systemmatrix. Zwar ist die Teilmatrix  $\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{D}}_s\mathbf{D}_\mu^{-1}\mathbf{D}_A^{-1}\mathbf{C}\mathbf{D}_s$  positiv semidefinit (PINDER, 1998), durch die Subtraktion der Diagonalmatrix  $\omega^2 \tilde{\mathbf{D}}_A \mathbf{D}_\varepsilon$  werden die Eigenwerte aber in negative Richtung verschoben. Dadurch kann die Systemmatrix indefinit werden. Betrachtet man Strukturen mit endlicher Leitfähigkeit wie z. B. Gewebe des menschlichen Körpers, wird durch die Diagonalmatrix  $j\omega \tilde{\mathbf{D}}_A \mathbf{D}_\sigma$  die Systemmatrix zusätzlich komplex, was eine stabile Lösung des Gleichungssystems erschwert.

Es ist möglich durch die Addition eines geeigneten Termes das Spektrum der Eigenwerte wieder in positive Richtung zu verschieben, ohne die dynamischen Lösungen zu verändern und so im verlustfreien Fall die sogenannte *diskrete Helmholtzgleichung* bei niedrigen Frequenzen zu berechnen (HAHNE, 1992).

Der Vorteil ist dann, dass die Helmholtz-Systemmatrix im verlustfreien Fall positiv definit und so das Gleichungssystem insgesamt einfacher zu lösen ist. Diese Vorteile gehen aber durch zweierlei verloren. Zum einen gilt dies nur für kleine Frequenzen, d. h. Fälle in denen die Wellenlänge des anregenden Stromes groß gegenüber dem betrachteten Rechenvolumen ist. Zum anderen erhält man sofort wieder eine komplexe Systemmatrix, werden Strukturen mit endlichen Leitfähigkeiten untersucht, wie sie die hier betrachteten Körpermodelle generell besitzen. Bei einigen Modellen ist zudem auch die anregende Frequenz nicht mehr klein genug, so dass in jedem Fall eine Lösung des Problems mit der Helmholtzgleichung ausscheidet, da die wesentlichen Vorteile verloren gehen und zusätzlich der höhere Speicher- und Rechenzeitbedarf dann einen gewichtigen Nachteil darstellt (siehe hierzu Abschnitt 5.2.1). Das bedeutet, dass letzten Endes doch die oben beschriebene Curl-Curl-Gleichung verwendet werden musste, die trotz der genannten Nachteile die bessere Alternative zur Lösung der numerischen Probleme in dieser Arbeit darstellt.

### 2.3.2 Dielektrische und magnetische Verluste

In der vorgestellten Matrixgleichung (2.30) können auch dielektrische und magnetische Verluste berücksichtigt werden. Die Permittivität  $\varepsilon_r$  ist dann komplex und definiert als  $\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon'_r - j\varepsilon''_r$ . Dadurch wird auch die Permittivitätsmatrix  $\underline{\underline{D}}_e$  komplex. Das gleiche gilt für die Permeabilität  $\mu_r$ , die bei Berücksichtigung magnetischer Verluste übergeht in die komplexe Permeabilität  $\underline{\mu}_r$ .

Da in den hier betrachteten Beispielen die Feldanregungen stets monofrequent sind, können dielektrische Verluste auch in der Leitfähigkeit  $\sigma$  berücksichtigt werden. Dadurch bleibt der imaginäre Anteil von  $\underline{\varepsilon}_r$  ungenutzt und die Permittivität reell:

$$\sigma = \sigma_s + \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r'' \quad (2.32)$$

Dies erfolgt in Anlehnung an die verfügbaren dielektrischen Parameter für menschliches Körpergewebe aus der Literatur, da hierbei neben dem Realteil der Permittivität  $\varepsilon_r$  die Leitfähigkeit  $\sigma$  als Summe aus frequenzunabhängiger statischer Ionenleitfähigkeit  $\sigma_s$  und Leitfähigkeit aufgrund in Phase schwingender polarisierbarer Ladungen angegeben ist (GABRIEL ET AL., 1996A; PETHIG, 1991).

Den dielektrischen Eigenschaften von menschlichem Gewebe ist hier ein eigenes Kapitel gewidmet. Daher soll an dieser Stelle nicht weiter auf die speziellen Eigenschaften von Körpergewebe eingegangen werden, sondern direkt auf die ausführlichen Darstellung in Kapitel 3 verwiesen werden.

### 2.3.3 Wahl der Randbedingungen

Eine weitere Entscheidung, die vor der Lösung des numerischen Problems getroffen werden muss, ist die Wahl der Randbedingungen an den Seitenrändern des betrachteten endlichen Volumens. Die beiden einfachsten Möglichkeiten, das Rechenvolumen abzuschließen, sind die Randflächen als ideal elektrisch leitend oder ideal permeabel zu betrachten. Das führt dazu, dass die tangentialen Feldstärkekomponenten des elektrischen Feldes auf dem Gitter  $\mathcal{G}$  oder die tangentialen magnetischen Flussdichtekomponenten auf dem dualen Gitter  $\tilde{\mathcal{G}}$  verschwinden (HAHNE, 1992).

Weiterhin gibt es noch die Möglichkeit offene Randbedingungen zu wählen, bei denen ein Anschluss des Rechenvolumens an den freien Raum simuliert wird (KRAWCZYK & WEILAND, 1988). Dieses Verfahren ist aber nur für senkrecht einfallende ebene Wellen reflexionsfrei (MAFIA, 2000B). Daher ist bei der Modellgenerierung darauf zu achten, dass ein ausreichend großer Abstand vom Modell zum Rand eingehalten wird, um die Reflexionen gering zu halten. Diese Problematik wird in Abschnitt 5.2.3 weiter erläutert.

### 2.3.4 Lösung des linearen Gleichungssystems

Zur numerischen Lösung des linearen Gleichungssystems, welches durch Gleichung (2.30) definiert wird, existieren zahlreiche Verfahren, auf die hier nur kurz mit den entsprechenden Literaturangaben verwiesen wird. Im Prinzip wird mit der rechten Seite von Gleichung (2.30) eine Stromverteilung auf den Gitterkanten von  $\mathcal{G}$  als Anregung vorgegeben und mit Hilfe numerischer Verfahren eine Lösung für das resultierende elektrische Feld bestimmt. Mit dem so berechneten elektrischen Feld lassen sich unter Berücksichtigung der dielektrischen Materialparameter mit Gleichung (2.32) und Gleichung (4.7) die Joule'schen Verluste im betrachteten Volumen bestimmen. Diese Werte können dann dem weiter unten beschriebenen thermodynamischen Algorithmus zur Verfügung gestellt werden, mit dem der zeitliche Verlauf der Erwärmung berechnet werden kann.

Da die Komplexität der betrachteten Probleme direkte Methoden wie das Gaußsche Eliminationsverfahren ausschließt, muss mit iterativen Methoden gearbeitet werden. Die Probleme, das beschriebene Gleichungssystem zu lösen, liegen in der Indefinitheit der komplexen Systemmatrix aufgrund der Modelle mit verlustbehafteten Materialien, was herkömmlichen iterativen Methoden Schwierigkeiten bereitet. Hierzu eignen sich erweiterte Verfahren auf Basis der konjugierten Gradienten. Einführungen in die Grundlagen dieser Verfahren finden sich bei AXELSSON

(1996); FAIRES UND BURDEN (1994); SAAD (1995) und SACHSE (1998) und sollen hier nicht näher erläutert werden.

Ein geeignetes Verfahren zur Lösung der diskreten Curl-Curl-Gleichung (2.30) mit verlustbehafteten Materialien ist das sogenannte **COCGSSOR**<sup>3</sup>-Verfahren. Dieser Algorithmus ist eine Erweiterung der konjugierten Gradienten und steht mit entsprechenden Möglichkeiten der Systemmatrixvorkonditionierung als Lösealgorithmus im Programmpaket MAFIA zur Verfügung. Alternativ dazu steht zusätzlich eine Reihe moderner Krylov-Unterraumverfahren zur Verfügung (**PSBCGR**<sup>4</sup> und **PQMR**<sup>5</sup>), die in bestimmten Fällen bessere Konvergenzeigenschaften als das erweiterte konjugierte Gradientenverfahren zeigen (CLEMENS ET AL., 1996).

Eine ausführliche Darstellung angeregter zeitharmonischer Felder und deren Lösungsverfahren mit besonderer Betrachtung des COCGSSOR-Verfahrens findet sich bei HAHNE (1992). Die neueren PSBCGR- und PQMR-Verfahren werden von CLEMENS UND WEILAND (1998) beschrieben. Die Untersuchung der Konvergenzeigenschaften verschiedener Lösealgorithmen des Programmpaktes MAFIA ist Gegenstand von Abschnitt 5.2.6.

## 2.4 Ableitung der Gitter-Wärmeleitungsgleichung

Die Absorption elektromagnetischer Energie im menschlichen Körper führt zu einer Erwärmung des Gewebes. Daher ist im allgemeinen nicht nur die Berechnung der im Körpermodell absorbierten Leistung interessant, sondern auch die Temperaturverteilung während und nach der Einwirkung der elektromagnetischen Felder auf das Gewebe. Mit der im vorhergehenden Abschnitt berechneten Verlustleistung kann durch iteratives Lösen der Wärmeleitungsgleichung im Zeitbereich die Temperaturverteilung im Rechenvolumen bestimmt werden.

Zunächst werden die Grundlagen des Wärmetransports in biologischen Geweben beschrieben, der sich näherungsweise durch die Biowärmeleitungsgleichung beschreiben lässt. Im darauf folgenden Abschnitt wird diese Gleichung analog zu den Maxwell-Gleichungen mit Hilfe der Finiten-Integrations-Technik diskretisiert und in eine Matrixgleichung umgeformt.

### 2.4.1 Grundlagen des Wärmetransports

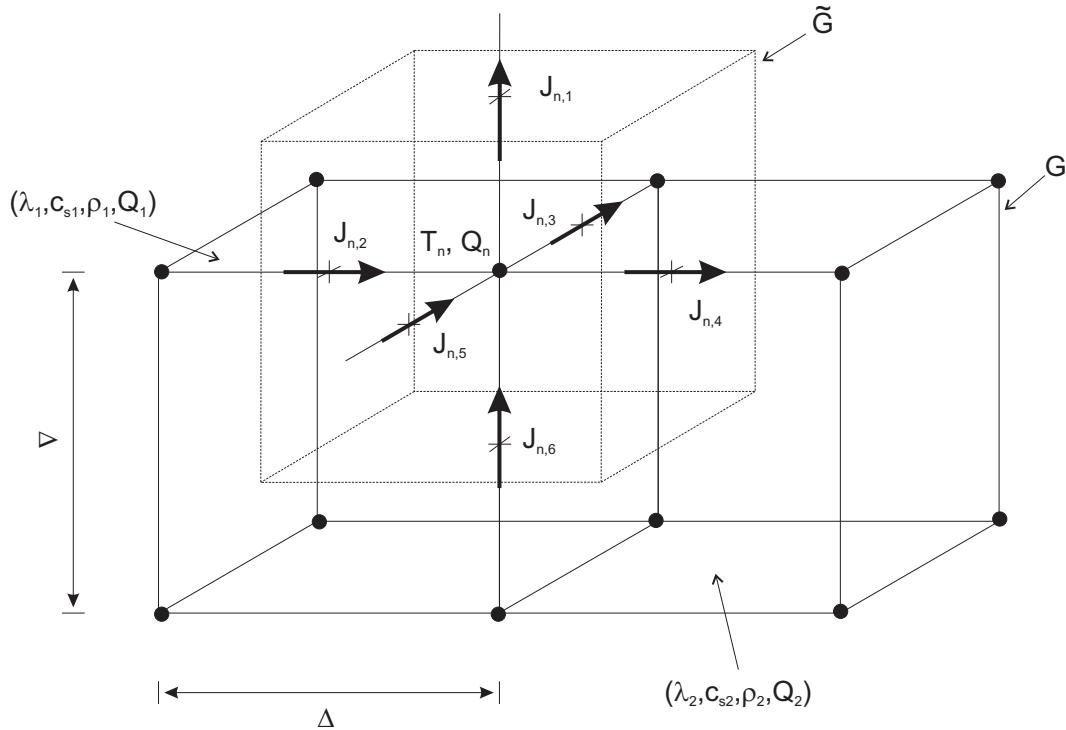
Die grundlegenden Wärmetransportmechanismen sind die Wärmeleitung, die Konvektion und die Wärmestrahlung. Die Wärmeleitung wird durch den Energietransport durch interatomaren Impulsaustausch und bei Metallen zusätzlich durch Elektronendiffusion bewirkt. Die Konvektion erfordert eine Strömung von Materie und ist nur in fluiden Medien möglich. Bei der Wärmestrahlung wird die Wärmeenergie durch elektromagnetische Strahlung transportiert. Oft treten alle drei Mechanismen gemeinsam auf. Bei Modellen des menschlichen Körpers ist vor allen Dingen die Wärmeleitung im Gewebe, sowie die Wärmekonvektion durch den Blutfluss maßgeblich. Die Berücksichtigung des Blutflusses führt zu einem zusätzlichen Wärmeabstransport aus dem betrachteten Rechenvolumen und dadurch zu einem zusätzlichen Kühlungseffekt. Für die Be trachtung des „schlimmsten Falls“ kann daher die Gewebedurchblutung vernachlässigt werden. Die Wärmestrahlung wird im weiteren näherungsweise durch geeignete Randbedingungen an den Oberflächen der berechneten Strukturen berücksichtigt.

---

<sup>3</sup>Conjugate Orthogonal Conjugate Gradient Sucessive Symmetric Over Relaxation

<sup>4</sup>Preconditioned Symmetric Biorthognal Conjugate GRadient

<sup>5</sup>Preconditioned Quasi Minimum Residual



**Abbildung 2.5:** Zur Diskretisierung der Biowärmeleitungsgleichung kann dasselbe räumliche Diskretisierungsverfahren verwendet werden, wie bei der Ableitung der Gitter-Maxwell-Gleichungen. Auf den Knotenpunkten des Gitters  $\mathcal{G}$  sind analog zur Anordnung der Potentiale die Temperaturwerte  $T_n$  innerhalb einer dualen Gitterzelle von  $\tilde{\mathcal{G}}$  definiert. Auf den Kanten des Gitters  $\mathcal{G}$  werden die Komponenten des Wärmestromes  $J_{n,i}$  definiert, die in die duale Gitterzelle  $\tilde{\mathcal{G}}$  ein- und ausströmen. Dadurch wird die Zelle erwärmt oder abgekühlt. Zusätzlich zu den Temperaturwerten sind auf den Knotenpunkten noch die Wärmeleistungen  $Q_n$  definiert, die zusätzliche Wärme durch Absorption elektromagnetischer Strahlung, Metabolismus und Blutfluss einbringen oder abführen. In jeder Elementarzelle können anisotrope Materialeigenschaften definiert werden. (Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist nur ein Teil der schwarzen Pfeile wiedergegeben.)

Grundlage für den thermischen Energietransport durch Wärmeleitung und Blutfluss in biologischen Körpergeweben ist die sogenannte *Bioheat-Transfer-Equation* (Biowärmeleitungsgleichung) (DUCK, 1990; BOWMAN, 1981). Sie besteht aus der Fourierschen Differentialgleichung der Wärmeleitung, die durch einen zusätzlichen Term für die Wärmekonvektion durch den Blutfluss und einen Term für die metabolische Eigenerwärmung erweitert wird:

$$\rho c_s \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \left( \lambda \vec{\nabla} T \right) - w_B c_B \rho_B \rho (T - T_B) + q_{HF} + q_M \quad (2.33)$$

mit der Gewebedichte  $\rho$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ), der Blutdichte  $\rho_B$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ), der spezifischen Wärmekapazität  $c_s$  ( $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ), der Temperatur  $T$  (K), der Bluttemperatur  $T_B$  (K), der spezifischen Wärmekapazität des Blutes  $c_B$  ( $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ), der Gewebeperfusion  $w_B$  ( $\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s})$ ), der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  ( $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ), der durch die elektromagnetischen Felder deponierten Leistungsdichte  $q_{HF}$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ) und der metabolischen Leistungsdichte  $q_M$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ).

Die linke Seite dieser Gleichung beschreibt den ersten Hauptsatz der Thermodynamik, indem sich die Temperatur in einem betrachteten Volumen aufgrund von Wärmediffusion durch die Randflächen, sowie durch die Konvektion durch den Blutfluss und den Energieeintrag durch elektromagnetische Verlustleistung und metabolische Eigenerwärmung ändert.

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes lässt sich Gleichung (2.33) auch in integraler Form angeben, dabei werden zur Vereinfachung der Schreibweise die Parameter, die die Eigenschaften des Blutes beschreiben zu einer Konstanten zusammengefasst, d. h.  $k_B = w_B c_B \rho_B \rho$ :

$$\int_V \rho c_s \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV = \oint_{\partial V} (\lambda \vec{\nabla} T) \cdot d\vec{A} + \int_V (-k_B (T - T_B) + q_{HF} + q_M) \cdot dV . \quad (2.34)$$

Diese Gleichung stellt nur eine Näherung der tatsächlichen Vorgänge dar, da kein spezieller Konvektionsterm in der Gleichung enthalten ist, sondern der gesamte Einfluss der Blutströmung durch Wärmequellen und -senken analog zu den absorbierten Leistungsdichten  $q_{HF}$  und  $q_M$  dargestellt wird. Anwendungen dieser Gleichung zeigen jedoch, dass die Abweichungen der berechneten Werte im Vergleich zu komplexen Modell der Hyperthermieberechnung gering ist (CHARNY & LEVIN, 1991).

Um die Übersichtlichkeit über Gleichung (2.34) weiter zu verbessern wird im folgenden der von der aktuellen Temperatur  $T$  unabhängige Term, der die Wärmequellen und -senken durch Energieeintrag, Metabolismus<sup>6</sup> und Blutfluss darstellt, durch das Symbol  $Q$  zusammengefasst und ersetzt:

$$Q = k_B T_B + q_{HF} + q_M . \quad (2.35)$$

Damit lässt sich Gleichung (2.34) einfach diskretisieren, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

## 2.4.2 Die Diskretisierung der Biowärmeleitungsgleichung

In Gleichung (2.34) ist das Fouriersche Gesetz enthalten, welches die Wärmestromdichte  $\vec{J}_w$  mit dem Temperaturgradienten und der Wärmeleitfähigkeit verknüpft:

$$\vec{J}_w = -\lambda \vec{\nabla} T . \quad (2.36)$$

Mit Hilfe dieses Gesetzes lässt sich die Diskretisierung mit der Finiten-Integrations-Technik der Biowärmeleitungsgleichung (2.34) demonstrieren. Das Volumenintegral über die Temperaturänderung in einer dualen Gitterzelle  $\tilde{V}_n$  auf der linken Seite von Gleichung (2.34) lässt sich mit Hilfe von Gleichung (2.36) anhand der Anordnung der thermischen Komponenten nach Abbildung 2.5 als Summe der einzelnen Wärmeströme  $J_n$  in und aus einer beliebigen dualen Gitterzelle mit der aktuellen Temperatur  $T_n$  und der zusätzlichen Wärmeleistung  $Q_n$  in der  $n$ -ten Gitterzelle beschreiben:

$$\int_{V_n} \rho c_s \frac{\partial T_n}{\partial t} \cdot dV_n = -J_{n,1} + J_{n,2} - J_{n,3} - J_{n,4} + J_{n,5} + J_{n,6} + Q_n - k_{B,n} T_n . \quad (2.37)$$

<sup>6</sup>In der Regel ist der Einfluss des Metabolismus im Vergleich zur Erwärmung durch die Verlustleistung so gering, dass er vernachlässigt werden kann. Der Einfluss des Metabolismus bleibt daher unberücksichtigt.

Die einzelnen Komponenten  $J_n$  sind hierbei vorzeichenrichtig zu summieren. Die Umsetzung in diskrete Gitter-Matrix-Gleichungen erfolgt analog zu Gleichung (2.9) und (2.10). Führt man diese Umsetzung auf allen dualen Gitterzellen aus, so erhält man die folgende diskrete Gitter-Matrix-Gleichung:

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{D}_m \cdot \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{t}} = -\tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \cdot (\vec{\mathbf{q}} - \mathbf{D}_{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{t}}) . \quad (2.38)$$

Ebenso lässt sich, analog zur Definition des elektrischen Feldes anhand des Gradienten eines Potentials wie in Gleichung (2.21) gezeigt, das Fouriersche Gesetz als diskrete Gleichung angeben:

$$\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{w}} = \mathbf{D}_{\lambda} \cdot \tilde{\mathbf{S}}^T \cdot \vec{\mathbf{t}} . \quad (2.39)$$

Die Matrizen  $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}}$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}$  und  $\tilde{\mathbf{S}}^T$  sind mit denen der bereits abgeleiteten Gitter-Maxwell-Gleichungen identisch und enthalten Geometrieinformationen ( $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}}$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}}$ ) oder stellen Operatoren dar ( $\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{S}}^T$ ).

Die Matrix  $\mathbf{D}_m$  enthält analog zu den Materialmatrizen  $\mathbf{D}_\varepsilon$ ,  $\mathbf{D}_\mu$  und  $\mathbf{D}_\sigma$  die gemittelten Dichten und spezifischen Wärmekapazitäten. Gleches gilt für die Matrix  $\mathbf{D}_\lambda$ , die die gemittelten Wärmeleitfähigkeiten enthält. Die Matrix  $\mathbf{D}_B$  ist ebenfalls eine Diagonalmatrix der Ordnung  $3n \times 3n$ , die die thermodynamischen Eigenschaften des Blutes enthält.

Setzt man Gleichung (2.39) in Gleichung (2.38) ein, so erhält man

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{D}_m \cdot \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{t}} = -\tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{D}_\lambda \cdot \tilde{\mathbf{S}}^T \cdot \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{t}} + \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} \cdot (\vec{\mathbf{q}} - \mathbf{D}_{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{t}}) , \quad (2.40)$$

die auch als *Gitter-Wärmeleitungsgleichung* bezeichnet wird. Im folgenden werden die Matrizen  $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}}$  und  $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}}$ , die die geometrischen Informationen enthalten aus Gründen der Übersichtlichkeit über die Gleichung unterdrückt. Als weitere Vereinfachung wird die Matrix  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{D}_\lambda \cdot \tilde{\mathbf{S}}^T$  eingeführt und die Matrix  $\mathbf{D}_m$  in Gleichung (2.40) auf die rechte Seite gebracht. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{t}} &= -\mathbf{D}_m^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{t}} + \mathbf{D}_m^{-1} \cdot (\vec{\mathbf{q}} - \mathbf{D}_{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{t}}) \\ &= -\mathbf{D}_m^{-1} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{D}_{\mathbf{B}}) \cdot \vec{\mathbf{t}} + \mathbf{D}_m^{-1} \cdot \vec{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

als Ausgangspunkt für die Berechnung von transienten Erwärmungen in Zeitbereich. Voraussetzung für die Bestimmung der Temperaturverteilung zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  ist die Festlegung einer anfänglichen Temperaturverteilung (Anfangsbedingung) und die Festlegung der Randbedingungen.

Die anfängliche Temperaturverteilung ist abhängig von Art und Struktur des gestellten Problems und ist im einfachsten Fall eine Konstante, d.h. jeder Knotenpunkt im Rechenvolumen erhält die gleiche Anfangstemperatur zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  und befindet sich so in einem thermodynamischen Gleichgewicht.

Als räumliche Randbedingungen existieren drei lineare Arten. Die erste Möglichkeit besteht darin, dass die Oberfläche des Rechenvolumens auf einer konstanten Temperatur gehalten wird. Die zweite Randbedingung besteht in der Annahme einer vorgegebenen Wärmestromdichte in

oder aus dem Rechenvolumen heraus. Als dritte Möglichkeit ergibt sich dann noch die gemischte Randbedingung, bei der das betrachtete Rechenvolumen mit einem ihm umgebenden fluiden Medium im Wärmeaustausch steht.

Eine weitere Randbedingung ist die Abgabe von Energie als elektromagnetische Strahlung nach dem Strahlungsgesetz von Stefan und Boltzmann. Diese ist aber nichtlinear und muss angenähert werden, um das gesamte Wärmeleitungsproblem linear zu belassen. Eine ausführliche Diskussion hierüber findet sich bei PINDER (1998).

Bisher wurden alle physikalischen Materialparameter immer als konstant angenommen. Hierbei gilt aber zu beachten, dass alle Materialparameter – die dielektrischen Parameter  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$  und  $\sigma$ , sowie die thermodynamischen Parameter  $\rho$ ,  $c_s$  und  $\lambda$  – temperaturabhängig sind. Diese Temperaturabhängigkeit ist in der Regel bei der Lösung numerischer Probleme zu berücksichtigen und erfordern unter Umständen mehrere Neuberechnungen bei der Lösung gekoppelter Probleme. Dies wird in Unterkapitel 2.6 diskutiert. Zunächst folgt im nächsten Unterkapitel eine Darstellung von zwei Lösungsverfahren der Biowärmeleitungsgleichung im Zeitbereich und einer Rechenzeitverkürzung durch eine adaptive Steuerung des Zeitschrittes.

## 2.5 Die Gitter-Wärmeleitungsgleichung im Zeitbereich

Die Lösung des thermodynamischen Problems im Zeitbereich kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen. Zum einen kann mit einem expliziten Verfahren die zeitliche Ableitung der Temperatur auf der linken Seite von Gleichung (2.41) durch eine Näherung ersetzt werden und die ganze Gleichung schrittweise mit einem festen Zeitschritt sukzessive berechnet werden. Der maximal stabile Zeitschritt für diese Iterationsmethode ist aber begrenzt, so dass mit einem impliziten Verfahren unabhängig von einem Stabilitätskriterium mit größeren Zeitschritten gearbeitet werden kann. Diese beiden Verfahren werden im folgenden kurz vorgestellt. Der interessierte Leser findet hierzu ausführliche Darstellungen und Ableitungen bei JALURIA UND TORRANCE (1986).

### 2.5.1 Explizite Zeitintegration

Bei der expliziten Zeitintegration wird die Zeitachse in vorgegebenen Zeitschritten  $\Delta t$  abgetastet. Der aktuelle Zeitschritt wird im folgenden mit  $n$  bezeichnet. Dazu wird in Gleichung (2.41) die Ableitung nach der Zeit durch eine Näherung ersetzt:

$$\frac{d}{dt} f(n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{\Delta t} + O(\Delta t) . \quad (2.42)$$

Diese Näherung wird auch *Vorwärtsdifferenzquotient* genannt. Setzt man in dieser Gleichung  $f(n) = \vec{t}(n)$  und diese Gleichung wiederum in (2.41) ein und löst nach  $\vec{t}(n+1)$  auf, so ergibt sich folgende Rekursionsformel für die Temperaturverteilung  $\vec{t}(n+1)$ :

$$\vec{t}(n+1) = (\mathbf{I} - \Delta t \cdot \mathbf{D}_m^{-1} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{D}_B)) \cdot \vec{t}(n) + \Delta t \cdot \mathbf{D}_m^{-1} \cdot \vec{q}(n) . \quad (2.43)$$

Diese Iteration besteht im wesentlichen aus einer einfachen Matrix-Vektor-Multiplikation. Durch die Berücksichtigung des Blutflusses ergibt sich eine zusätzliche Subtraktion auf der Hauptdiagonalen der Iterationsmatrix, da der Parameter  $w_B$ , der die Gewebeperfusion beschreibt, stets positiv ist, wenn die Durchblutung des Gewebes berücksichtigt wird.

Wird die Durchblutung nicht berücksichtigt, ergibt sich dieser Parameter zu Null. Die Diagonalmatrix  $\mathbf{D}_B$  verschwindet dann aus der Iterationsmatrix. Weiterhin fällt dann der Term  $k_B T_B$  aus dem Vektor  $\vec{q}(n)$  heraus, der nach Gleichung (2.35) den temperaturunabhängigen Teil des Perfusionsterms darstellt.

Damit das Iterationsverfahren stabil ist, ist es erforderlich, dass die Eigenwerte der Iterationsmatrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - \Delta t \cdot \mathbf{D}_m^{-1} (\mathbf{A} + \mathbf{D}_B) \quad (2.44)$$

betragmäßig kleiner oder gleich eins sind (JALURIA & TORRANCE, 1986), der Spektralradius<sup>7</sup> also der Bedingung

$$\varrho(\mathbf{B}) = \|\mathbf{B}\|_2 \leq 1 \quad (2.45)$$

genügt. Dies führt unmittelbar zu folgendem Stabilitätskriterium für den maximal zulässigen stabilen Zeitschritt, das in jeder Gitterzelle erfüllt sein muss:

$$\Delta t_{\max} \leq \frac{\rho c_s \cdot \left(2 - \frac{w_B \rho_B c_B}{c_s}\right)}{4\lambda} \cdot \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{-1}. \quad (2.46)$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass eine Verfeinerung des Gitternetzes sowie die Berücksichtigung des Blutflusses durch das Gewebe den maximal zulässigen Zeitschritt verkleinert. Im praktischen Fall ist der Zeitschritt gemäß dieser Bedingung in jeder Gitterzelle zu berechnen und dann für die gesamte Iterationsrechnung das kleinste ermittelte  $\Delta t_{\max}$  zu verwenden. Bei feinen Gitterauflösungen und menschlichem Gewebe führt dies auf Zeitschrittweiten unter 1 ms Dauer was zu einer sehr hohen Anzahl an Iterationsschritten und damit verbunden einer langen Rechenzeit führt. Dies schränkt die Anwendbarkeit des expliziten Verfahrens für große Simulationszeiträume ein. Daher muss oft auf das im nächsten Abschnitt besprochene implizite Verfahren ausgewichen werden.

### 2.5.2 Implizite Zeitintegration

Aufgrund der Einschränkung bezüglich des maximal zulässigen Zeitschrittes beim expliziten Verfahren wird im folgenden ein Verfahren vorgestellt, bei dem die Eigenwerte der Iterationsmatrix unabhängig von der Wahl der Zeitschrittweite  $\Delta t$  stets kleiner oder gleich eins sind. Bei diesem impliziten Verfahren ist daher ein beliebiger Zeitschritt wählbar. Um dieses Verfahren abzuleiten wird zunächst eine alternative Näherung zum Vorwärtsdifferenzenquotienten (2.42) betrachtet:

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{\Delta t} \approx \gamma \frac{df(n+1)}{dt} + (1 + \gamma) \frac{df(n)}{dt}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (2.47)$$

Für  $\gamma = 0$  erhält man den Vorwärtsdifferenzenquotient, für  $\gamma = 1$  den Rückwärtsdifferenzenquotient. Hier ist insbesondere der Fall  $\gamma = 1/2$  von Interesse, welches auf ein Verfahren führt, das in der Literatur als *Crank-Nicolson-Verfahren* bekannt ist (LICK, 1989).

---

<sup>7</sup>Der betragmäßig größte Eigenwert einer Matrix  $\mathbf{B}$  wird auch Spektralradius  $\varrho(\mathbf{B})$  genannt.

Setzt man für  $\gamma = 1/2$  die Gitter-Wärmeleitungsgleichung (2.41) in Gleichung (2.47) ein, so ergibt sich mit Berücksichtigung des Blutflusses:

$$\vec{t}(n+1) = [2\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{D}_m^{-1} (\mathbf{A} + \mathbf{D}_B)]^{-1} [2\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{D}_m^{-1} (\mathbf{A} + \mathbf{D}_B)] \cdot \vec{t}(n) + \Delta t \cdot [2\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{D}_m^{-1} (\mathbf{A} + \mathbf{D}_B)]^{-1} \cdot \mathbf{D}_m^{-1} \cdot [\vec{q}(n+1) + \vec{q}(n)]. \quad (2.48)$$

Dieses implizite Rekursionsschema ist komplizierter als das explizite nach Gleichung (2.43). Neben einer Matrix-Vektor-Multiplikation ist die Matrix  $2\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{D}_m^{-1} (\mathbf{A} + \mathbf{D}_B)$  zu invertieren, was gleichbedeutend ist mit dem Lösen eines linearen Gleichungssystems. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass die Eigenwerte der Systemmatrix stets kleiner als eins sind, unabhängig vom gewählten Zeitschritt  $\Delta t$ . Die Tatsache, dass keine obere Schranke für ein stabiles  $\Delta t_{max}$  existiert muss allerdings durch einen höheren numerischen Aufwand erkauft werden, da hierbei die Systemmatrix invertiert werden muss. Dies ist nicht zwingenderweise bei jedem Rechenschritt notwendig, sondern kann aus Gründen der Zeitersparnis auch in guter Näherung abhängig von der Temperaturveränderung im Rechenvolumen gesteuert werden. D. h. die Matrixinversion wird erst bei Erreichen einer maximalen Temperaturänderung an einem beliebigen Punkt im Rechenvolumen durchgeführt.

Die Matrixinversion wird durch Lösen eines linearen Gleichungssystems durchgeführt welches das Verfahren der konjugierten Gradienten verwendet (HACKBUSCH, 1990). Der größere numerische Aufwand des impliziten Verfahrens lohnt in den Fällen, wo auf eine häufige Aktualisierung der invertierten Matrix verzichtet werden kann. Das sind Fälle, bei denen zwischen den einzelnen Zeitschritten nur kleine Temperaturänderungen ( $< 1$  K) auftreten.

Die Wahl des Zeitschrittes beeinflusst außerdem die Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsverfahrens zur Matrixinversion. Ein zu großer Zeitschritt verzögert die Konvergenz so sehr, dass die Geschwindigkeitsvorteile des impliziten Verfahrens verloren gehen. Die Wahl des geeigneten Zeitschrittes beruht letzten Endes auf Erfahrungswerten und ist Teil der numerischen Voruntersuchungen in Kapitel 5. Darüber hinaus ist es möglich, den Zeitschritt während der Iteration sukzessive zu vergrößern, was eine beträchtliche Einsparung an Rechenzeit mit sich bringen kann, wie im nächsten Abschnitt erläutert wird.

### 2.5.3 Adaptive Zeitschrittsteuerung des thermodynamischen Lösers

Die implizite Zeitintegration erlaubt die Wahl eines beliebigen Zeitschrittes im Gegensatz zur expliziten Zeitintegration. Dadurch ist es möglich auch während des Simulationslaufes den Zeitschritt anzupassen. Die Vorteile den Zeitschritt zu ändern, liegen bei den besseren Möglichkeiten zeitliche Abläufe mit weniger Iterationsschritten und damit weniger numerischem Rechenaufwand zu simulieren.

Geht man z. B. von einer Quelle mit konstanter Leistung aus, so erreicht die Temperaturverteilung nach einiger Zeit einen stationären Zustand und der Temperaturanstieg im Modell zeigt einen exponentiellen Verlauf. Die Temperaturerhöhungen sind zu Beginn der Iteration am größten und werden im weiteren Verlauf immer kleiner.

In diesen Fällen ist es möglich, den Zeitschritt sukzessive zu erhöhen, um so die Anzahl der Iterationsschritte zu verringern. Dazu ist eine adaptive Zeitschrittsteuerung notwendig, die ausgehend

von der maximalen Temperaturerhöhung an einem Punkt im Rechenvolumen den nächsten Zeitschritt so wählt, dass der lokale zeitliche Diskretisierungsfehler immer in der gleichen Größenordnung bleibt.

Ähnliche Vereinfachungen sind auch bei einem gepulsten Hochfrequenzfeld möglich. Je nach dem Puls-Pausenverhältnis kann eine gemittelte Dauerleistung angenommen und dann wiederum mit einem adaptiven Zeitschritt gerechnet werden, wenn auf eine genaue zeitliche Nachbildung der einzelnen Hochfrequenzpulse in guter Näherung verzichtet werden kann. In Abschnitt 5.4 finden sich zu dieser Thematik Ergebnisse von vergleichenden Rechnungen.

PINDER (1998) schlägt für diese Fälle eine einfache Zeitschrittweitensteuerung vor, bei der die Zeitschrittweite  $\Delta t_n$  in Abhängigkeit von der Abnahme der Steigung des Temperaturverlaufes vergrößert wird. Da die Temperaturzunahme im Rechenvolumen nicht überall gleich groß ist, ist der Gitterpunkt zu wählen, an dem der Temperaturanstieg im letzten Rechenschritt am größten ist. Nach PINDER bildet man die Maximumnorm der Temperaturverteilung zwischen aktuellem Zustand und der Verteilung vor dem letzten Zeitschritt und setzt diese ins Verhältnis zu der Maximumnorm, die aus der Temperaturverteilung vor und nach dem ersten Zeitschritt ermittelt wurde. Der Zeitschritt  $\Delta t_{n+1}$  ergibt sich dann zu:

$$\Delta t_{n+1} = \frac{\|\vec{t}(1) - \vec{t}(0)\|_\infty}{\|\vec{t}(n) - \vec{t}(n-1)\|_\infty} \cdot \Delta t_n . \quad (2.49)$$

Diese Zeitschrittsteuerung hat zur Folge, dass die maximale Temperaturänderung an den Gitterknotenpunkten in etwa gleich groß bleibt.

Praktischerweise wird die Schrittweitenanpassung während der Iteration so durchgeführt, dass nach dem ersten Iterationsschritt mit einer initialen kleinen Zeitschrittweite  $\Delta t_0$  derjenige Gitterpunkt im Gitter bestimmt wird, an dem die maximale Temperaturzunahme stattgefunden hat. Aufgrund der konstanten Wärmeleistung bleibt in den meisten Fällen dieser Knoten stets der Punkt maximaler Temperaturzunahme und kann in guter Näherung dann bei allen folgenden Iterationsschritten als Referenzwert für die Zeitschrittsteuerung verwendet werden, anstatt immer wieder neu bestimmt zu werden.

Ein Nachteil von Gleichung (2.49) liegt darin, dass der Zeitschritt  $\Delta t_{n+1}$  bei Erreichen des stationären Zustandes unendlich groß wird, weil der Nenner in Gleichung (2.49) gegen Null geht. Aus diesem Grund ist es notwendig, die maximale Zeitschrittzunahme durch einen Faktor  $k > 1,0$  zu begrenzen. Damit ergibt sich für den Zeitschritt  $\Delta t_{n+1}$  folgende Bedingung:

$$\Delta t_{n+1} = \min \left\{ \frac{\|\vec{t}(1) - \vec{t}(0)\|_\infty}{\|\vec{t}(n) - \vec{t}(n-1)\|_\infty} \cdot \Delta t_n, k \cdot \Delta t_n \right\} . \quad (2.50)$$

Allerdings ist diese Zeitschrittsteuerung nach PINDER nicht für jedes numerische Modell geeignet. Trotz der Einschränkung bezüglich der maximal möglichen Zeitschrittzunahme durch den Faktor  $k$  kann bei langen Simulationszeiträumen der Zeitschritt  $\Delta t_{n+1}$  sehr groß werden. Daraus ergeben sich letzten Endes Probleme bei der Matrixinversion in Gleichung (2.48). Je größer der Zeitschritt  $\Delta t_{n+1}$  gewählt wird, desto mehr erhöht sich die Konditionszahl<sup>8</sup> der Systemmatrix und desto

<sup>8</sup>Die Konditionszahl  $\chi(\mathbf{A})$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  ergibt sich aus dem Produkt des jeweils betragsmäßig größten Eigenwertes der Matrix  $\varrho(\mathbf{A})$  und der invertierten Matrix  $\varrho(\mathbf{A}^{-1})$  (HACKBUSCH, 1990). Damit ergibt sich für die Konditionszahl  $\chi(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{A}) \cdot \varrho(\mathbf{A}^{-1})$ .

mehr Iterationsschritte sind notwendig, diese Matrix zu invertieren. Der Anstieg der notwendigen Iterationsschritte bei der Matrixinversion kann sogar so groß werden, dass der Vorteil einer Verkürzung der benötigten Rechenzeit komplett verloren geht, der primär durch die adaptive Zeitschrittvergrößerung erreicht werden sollte.

Aus diesem Grund wird vorgeschlagen, Gleichung (2.50) um einen dritten Term zu erweitern. Als einfachste Lösung bietet sich die Einführung eines absoluten maximalen Zeitschrittes  $\Delta t_{\max}$  an, der verhindert, dass der Zeitschritt über alle Grenzen steigt. Die Iteration kann somit in ihrem Verlauf in eine Iteration mit konstantem Zeitschritt übergehen. Für die Zeitschrittweitenberechnung gilt daher:

$$\Delta t_{n+1} = \min \left\{ \frac{\|\vec{t}(1) - \vec{t}(0)\|_\infty}{\|\vec{t}(n) - \vec{t}(n-1)\|_\infty} \cdot \Delta t_n, k \cdot \Delta t_n, \Delta t_{\max} \right\}. \quad (2.51)$$

In der Praxis hat sich gezeigt, dass bei manchen Problemen ein maximaler Zeitschritt von  $\Delta t_{\max} = 400$  s noch eine zufriedenstellende Konvergenzgeschwindigkeit der Systemmatrixinversion des impliziten Verfahrens ergibt und somit einen brauchbaren Kompromiss darstellt, da selbst bei langen simulierten Zeiträumen von bis zu 18 000 s eine deutliche Reduktion der benötigten Iterationsschritte und damit auch der Rechenzeit erzielt werden kann. Für den Faktor  $k$  ergeben Werte um 1,25 gute Ergebnisse bezüglich einer schnellen Zeitschrittzunahme bei Annäherung an den stationären Zustand, ohne die Dauer für die Matrixinversion zu sehr zu erhöhen. In Kapitel 5 über numerische Voruntersuchungen wird darauf noch ausführlich eingegangen.

## 2.6 Numerische Kopplung elektrodynamischer und thermodynamischer Prozesse

Die Kopplung elektrodynamischer und thermodynamischer Prozesse ist von fundamentaler Bedeutung für die Beurteilung der Auswirkung von Therapie- und Diagnosemethoden auf den menschlichen Körper. Die Leistungsabsorption aus einem elektromagnetischen Feld führt zu einer lokalen Erwärmung. Erst die genauere thermodynamische Betrachtung erlaubt Rückschlüsse auf die Risiken für den Patienten. Dazu ist es notwendig, das elektrodynamische und das thermodynamische Problem zu koppeln. Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen (2.1-2.4) und der Biowärmeleitungsgleichung (2.34) ergibt sich ein nichtlineares gekoppeltes System partieller Differentialgleichungen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} [\mu(T) \vec{H}] \quad (2.52)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon(T) \vec{E}] + \sigma(T) \vec{E} \quad (2.53)$$

$$\vec{\nabla} \cdot [\varepsilon(T) \vec{E}] = \rho_e \quad (2.54)$$

$$\vec{\nabla} \cdot [\mu(T) \vec{H}] = 0 \quad (2.55)$$

$$\rho c_s \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + Q - k_B T. \quad (2.56)$$

Die einzelnen Gleichungen dieses Gleichungssystems sind durch die Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Materialparameter  $\epsilon$ ,  $\mu$  und  $\sigma$  gekoppelt. Die Verkopplung der Biowärmeleitungsgleichung mit den Maxwell-Gleichungen kommt über die Größe  $Q$  zustande, die nach Gleichung (2.35) auch die Verlustleistung  $q_{HF}$  enthält, die sich aus der Lösung des elektromagnetischen Problems ergibt.

Eine analytische geschlossene Lösung des Systems lässt sich aufgrund der Komplexitäts des Problems im allgemeinen nicht angeben. In der Praxis lässt sich das gekoppelte Problem näherungsweise entkoppeln, indem man die dielektrischen Parameter in einem gewissen Temperaturbereich als konstant annimmt. Dadurch wird die Lösung vereinfacht und das Problem kann in zwei Teilschritte aufgeteilt werden.

Zunächst wird das elektromagnetische Problem im Frequenzbereich wie in Abschnitt 2.3 beschrieben gelöst. Die zu untersuchende Struktur wird einem elektromagnetischen Feld ausgesetzt welches durch eine sinusförmige kontinuierliche Stromdichte  $\underline{J}_e$  erzeugt wird. Mit einem Lösealgorithmus wird das entstehende elektrische Feld  $\underline{\vec{E}}$  in seinem eingeschwungenen Zustand berechnet. Damit lässt sich in jeder Gitterzelle die Verlustleistung bestimmen.

Die mittlere Verlustleistung  $\overline{P}_n$  in jeder einzelnen Gitterzelle ist proportional zum Quadrat des Mittelwertes des elektrischen Feldes  $\overline{E}_{Am}$ . Dieser ergibt sich bei sinusförmiger Feldanregung aus dem Betragsquadrat  $E_{Am} \equiv |\underline{\vec{E}}|$  der komplexen Amplitude des elektrischen Feldes durch Division der Feldamplitude  $E_{Am}$  durch den Faktor  $\sqrt{2}$ :

$$\overline{P}_n = \int_{V_n} \sigma(T) \overline{E}_{Am}^2 dV = \frac{1}{2} \int_{V_n} \sigma(T) E_{Am}^2 dV . \quad (2.57)$$

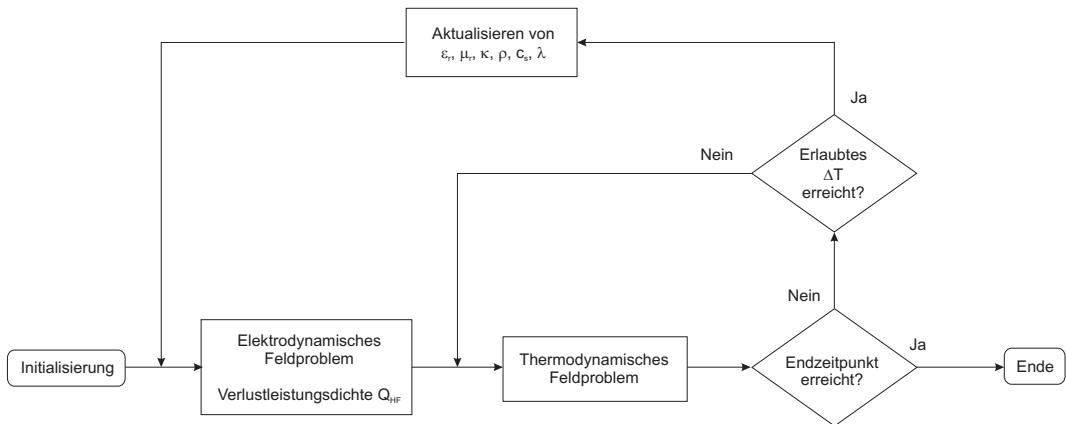
Der Eingabeparameter  $q_{HF}$  in Gleichung (2.56) stellt eine Leistungsdichte dar. Daher ist für jedes Volumenelement des Rechengebietes die berechnete Verlustleistung noch durch das Volumen  $\Delta V_n$  der betrachteten Gitterzelle zu dividieren:

$$q_{n,HF} = \frac{\overline{P}_n}{\Delta V_n} . \quad (2.58)$$

Die gesamte Verlustleistung ergibt sich durch Summation der einzelnen Beträge aller Gitterzellen. Bei biologischen Materialien erfolgt die Bestimmung der Verlustleistung auch gemäß Gleichung (2.57). Allerdings gestaltet sich die Zusammensetzung der Leitfähigkeit  $\sigma$  komplizierter, so dass dieser Problematik ein eigener Abschnitt 4.2.3 gewidmet ist, bei der die Berechnung der Verlustleistung nochmals ausführlicher dargestellt wird.

Die so berechnete gemittelte Verlustleistungsdichte dient als Eingabeparameter  $q_{HF}$  in Gleichung (2.34). Ausgehend von einer Anfangstemperaturverteilung kann im Zeitschrittverfahren die Erwärmung im Rechenvolumen ermittelt werden. Dabei ist es mit dem vorgestellten Verfahren auch möglich, gepulste Vorgänge zu simulieren, da die Verlustleistungsdichte  $q_{HF}$  während der Iteration beliebig gesetzt werden kann. Dies ist mit einem An- und Abschalten der Energiequelle vergleichbar.

Im Falle einer nicht vernachlässigbaren Änderung der dielektrischen und physikalischen Parameter durch die entstehende Erwärmung ist das zeitliche Iterationsverfahren bei Erreichen einer Grenztemperatur abzubrechen und mit den angepassten dielektrischen Parametern  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$  und  $\sigma$  zunächst wiederum das elektromagnetische Feldproblem zu lösen. Aus der Lösung ergibt sich



**Abbildung 2.6:** Das Ablaufschema zeigt das prinzipielle numerische Vorgehen bei der Berechnung gekoppelter elektromagnetischer und thermodynamischer Probleme. Zunächst wird das elektrodynamische Feldproblem gelöst und dabei die Verlustleistung im betrachteten Rechenvolumen ermittelt. Die Verlustleistung dient als Eingabeparameter für den thermodynamischen Algorithmus. Wird eine vorher definierte Temperaturerhöhung im Rechenvolumen überschritten, so bricht der thermodynamische Algorithmus ab und die physikalischen Materialparameter werden neu bestimmt, um dann wieder das elektrodynamische Feldproblem erneut zu lösen und die Verlustleistung erneut zu bestimmen.

Dies wird fortgeführt, bis der Endzeitpunkt erreicht wird.

eine neue Verlustleistungsdichteverteilung mit der die unterbrochene Erwärmungsberechnung fortgesetzt werden kann. Dabei gilt es dann auch die übrigen physikalischen Parameter  $\lambda$ ,  $c_s$  und  $\rho$  der aktuellen Temperaturverteilung anzupassen.

Dieser Wechsel zwischen elektromagnetischem und thermodynamischen Löser ist so oft durchzuführen bis die gewünschte Simulationszeit erreicht ist. Abbildung 2.6 verdeutlicht diese Vorgehensweise.

Diese Entkopplung und damit sukzessive Berechnung ist möglich, da in der Regel das elektromagnetische Feld bereits eingeschwungen ist, bevor sich signifikante Temperaturveränderungen ergeben. Elektromagnetische Einschwingvorgänge spielen sich im Laufe einiger Periodendauern des anregenden Signals ab. Nimmt man zum Beispiel 100 Perioden bei einer Frequenz von 100 MHz an, so ergibt sich eine Einschwingdauer von  $1 \mu\text{s}$ , die weit unter der Zeitdauer für eine Änderung der Temperaturverteilung liegt.

Zur Verdeutlichung kann der maximal zulässige Zeitschritt (2.46) als Zeitkonstante für das thermodynamische Iterationsverfahren für einige Materialien und Gitterschrittweiten berechnet werden und mit dem *Courant-Kriterium* verglichen werden. Dieses Kriterium gibt den maximalen stabilen Zeitschritt bei der transientes Berechnung elektromagnetischer Felder mit den Maxwell'schen Gleichungen im Zeitbereich an und ist ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der die Feldänderungen ablaufen (THOMA & WEILAND, 1998):

$$\Delta t_{\max} \leq \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r} \cdot \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.59)$$

Material	$\Delta t_{\max,\text{th}}$	$\Delta t_{\max,\text{el}}$	$\Delta t_{\max,\text{th}}$	$\Delta t_{\max,\text{el}}$
	( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1 \text{ mm}$ )	( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 10 \text{ mm}$ )		
Muskel	1,261 s	$1,637 \cdot 10^{-11} \text{ s}$	126,1 s	$1,637 \cdot 10^{-10} \text{ s}$
Fett	1,823 s	$7,120 \cdot 10^{-12} \text{ s}$	182,3 s	$7,120 \cdot 10^{-11} \text{ s}$
Nervengewebe	1,270 s	$1,430 \cdot 10^{-11} \text{ s}$	127,0 s	$1,430 \cdot 10^{-10} \text{ s}$

**Tabelle 2.1:** Vergleich der maximalen stabilen Zeitschrittweiten bei der Lösung elektrodynamischer und thermodynamischer Probleme im Zeitbereich. Angeben sind die Zeitschrittweiten berechnet nach der thermodynamischen Stabilitätsbedingung (2.46)  $\Delta t_{\max,\text{th}}$  und dem Courant-Kriterium (2.59)  $\Delta t_{\max,\text{el}}$  für zwei verschiedene Gitterschrittweiten eines äquidistanten Gitters und drei verschiedene biologische Materialien. Bei der Berechnung wurden die dielektrischen Parameter bei einer Feldfrequenz von 63,9 MHz nach Tabelle B.3 verwendet. Die thermodynamischen Parameter wurden entsprechend Tabelle B.1 eingesetzt. Für alle Parameter wurde eine Temperatur von 37° C angenommen.

Tabelle 2.1 vergleicht die maximalen stabilen Zeitschritte bei der Lösung eines thermodynamischen und eines elektrodynamischen Problems bei zwei Gitterschrittweiten eines äquidistanten Gitters und drei verschiedenen biologischen Materialien. Die Gitterschrittweite wurde in Anlehnung an die in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Modelle gewählt. Der Vergleich zeigt, dass die thermodynamischen Zeitschrittweiten  $\Delta t_{\max,\text{th}}$  in jedem Fall um einige Größenordnungen über den elektromagnetischen Schrittweiten  $\Delta t_{\max,\text{el}}$  liegen. Für alle im folgenden untersuchten Modelle gilt  $\Delta t_{\max,\text{el}} \ll \Delta t_{\max,\text{th}}$ , so dass das Berechnungsschema aus Abbildung 2.6 als gute Näherung zur Lösung des gekoppelten Problems verwendet werden kann.

In den Fällen, in denen sich durch die Absorption von Energie aus dem Hochfrequenzfeld nur kleine Temperaturerhöhungen ergeben, kann in guter Näherung auf eine Wiederholung des Lösevorgangs des elektromagnetischen Feldproblems verzichtet werden, da sich bei kleinen Temperaturveränderungen die dielektrischen Parameter nur unwesentlich ändern. Bei biologischen Materialien ist auch eine Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Parameter zu beobachten, die berücksichtigt werden muss, sofern ihre Größenordnung bekannt ist. Dies wird eingehend in Abschnitt 3.4.4 diskutiert. Die maximale Temperaturerhöhung, ab der eine erneute Lösung des elektromagnetischen Feldproblems notwendig wird, ist immer im Einzelfall festzulegen. Dabei ist auch zunächst abzuschätzen, ob der zusätzliche Rechenzeitaufwand in einem sinnvollen Verhältnis zu einer Verbesserung der numerischen Lösung steht.

## 2.7 Das Programmpaket MAFIA

### 2.7.1 Einführung

Das Programmpaket MAFIA ist ein CAD-Programm zur Lösung elektromagnetischer und thermodynamischer Feldprobleme, welches die komplette zweidimensionale und dreidimensionale Modellierung beliebiger geometrischer Strukturen in kartesischen Koordinaten oder Zylinderkoordinaten erlaubt. Der Kern des modularen Programmpakets sind die verschiedenen Lösealgorithmen, die Feldprobleme aus einer großen Palette von Problemstellungen mit Hilfe der Finiten-Integrations-Technik lösen (siehe Abschnitt 2.2). Dazu gehören unter anderem elektro- und magnetostatische

Probleme, Probleme mit harmonischer Feldanregung im Frequenzbereich, die Berechnung transienter Vorgänge im Zeitbereich oder die Lösung thermodynamischer Feldprobleme. Die Lösealgorithmen werden durch Programmteile zur Vorverarbeitung und Nachbearbeitung der Modelle und numerischen Lösungen ergänzt (siehe Abbildung 2.7). Im folgenden werden die einzelnen Module des Programmpaketes MAFIA in der Version 4.106 benannt und kurz beschrieben. Am Ende finden sich Literaturhinweise mit weiterführenden Darstellungen.

### 2.7.2 Der modulare Aufbau von MAFIA

An erster Stelle steht die Generierung eines Gitternetzes im Netzgenerator **M**. Mit Hilfe geometrischer Primitive (Kreis, Quadrat, Kugel, Würfel, etc.) lassen sich zunächst fast beliebig komplexe, zwei- oder dreidimensionale Strukturen definieren. Den einzelnen Primitiven wird dann eine Materialnummer zugeordnet. Die physikalischen Materialeigenschaften werden an dieser Stelle aber noch nicht gesetzt. Dies geschieht in den einzelnen Lösermodulen.

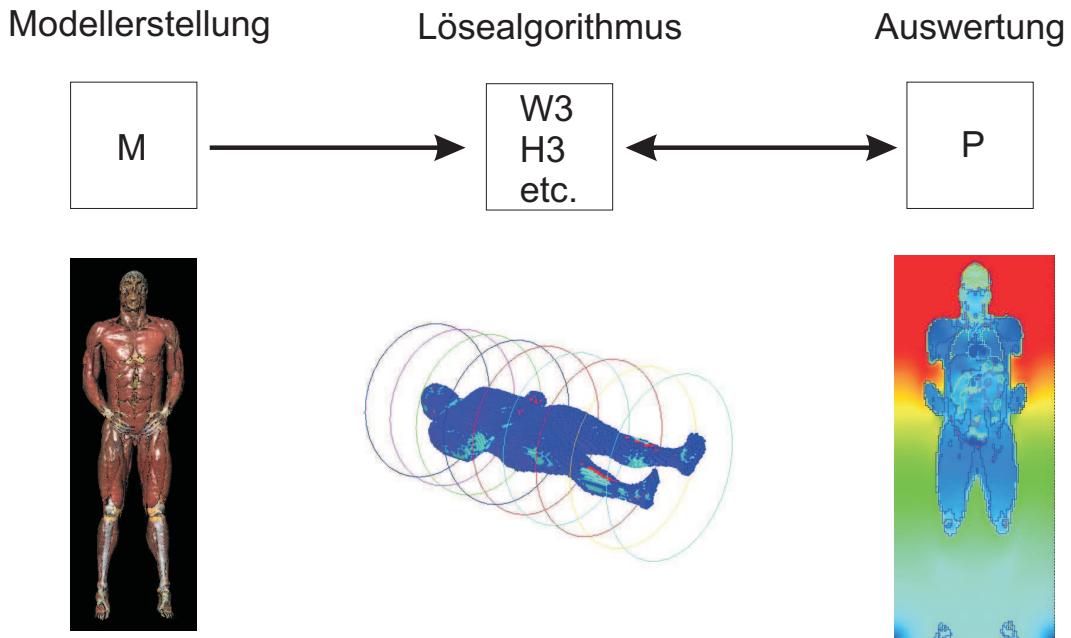
Im nächsten Schritt wird das betrachtete Volumen mit einem kartesischen oder zylindrischen zwei- oder dreidimensionalen Gitter überzogen. Dabei werden die vorher definierten geometrischen Primitive durch eine oder mehrere Gitterzellen mit homogener Materialfüllung approximiert. Dieser Vorgang wird auch *geometrische Diskretisierung* genannt. Hierbei kommt es insbesondere bei runden Primitiven durch die Approximation mit einem rechtwinkligen Gitternetz zu einem räumlichen Diskretisierungsfehler. Dieser kann durch die Verwendung von nur partiell gefüllten Gitterzellen (Dreieckszellen) verringert, aber nicht ganz vermieden werden.

Die Gittergrößen und -abstände können hierbei im Rahmen der zur Verfügung stehenden Speicherkapazität des Rechners frei gewählt werden. Die Gesamtzahl der Gitterknoten ergibt sich dann aus der Multiplikation der einzelnen Gitterkanten in jeder Raumrichtung. Der Speicherbedarf pro Knotenpunkt ist abhängig vom verwendeten Lösealgorithmus und spielt bei der Gittergenerierung nur eine untergeordnete Rolle. Allerdings sollte an dieser Stelle schon bei der Dimensionierung des Gitters die spätere Speicherauslastung bedacht werden, wenn es um die Gesamtanzahl der Gitterknoten geht. Hier ist oft eine Gratwanderung zwischen Speicherbedarf und Rechenzeit, sowie geometrischer Auflösung und damit auch räumlicher Diskretisierungsfehler nötig.

In das erstellte Gitter können dann zusätzlich direkt komplexe geometrische Datensätze integriert werden, wie z. B. Modelle des menschlichen Körpers, die sich nicht aus Primitiven generieren lassen. Weiterhin erlaubt das Programmpaket MAFIA die Integration von Fäden – sogenannte *Filamente* – in das Gitter, die als ideale elektrische Leiter eine leitende Verbindung zwischen zwei Volumenbereichen ermöglichen, als Träger eines anregenden Stromes oder als Integrationspfade für die Nachbearbeitung dienen können.

Der nächste Schritt besteht in der Auswahl eines für das Problem geeigneten Lösermoduls. In den vorhergehenden Abschnitten wurden die Lösung der Maxwellschen Gleichungen für harmonische sinusförmige Feldanregungen im Frequenzbereich (siehe Abschnitt 2.3) und die Lösung der Biowärmetransportgleichung im Zeitbereich (siehe Abschnitt 2.5) vorgestellt. Die zugehörigen Algorithmen wurden in die Module **W3** und **H3** integriert. Neben diesen gibt es noch Module zur Lösung der Maxwell-Gleichungen und Berechnung von transienten Vorgängen im Zeitbereich **T2**, **T3** und **TL3**, sowie zur Lösung elektrostatischer Probleme **S** und Eigenwertprobleme **E**.

In jedem Lösermodul können den Materialnummern der einzelnen Gitterzellen physikalische Materialeigenschaften zugewiesen werden. Diese Eigenschaften können sich in den einzelnen



**Abbildung 2.7:** Grundlegender Aufbau der Feldrechnungssoftware MAFIA. Zunächst wird im Netzgenerator **M** ein numerisches Modell erstellt. Als Eingabedaten können beliebige geometrische Formen oder auch komplexe Modelldatensätze, z. B. menschliche Körpermodelle, dienen. In der so generierten Gitterstruktur wird eine Feldanregung definiert und dann die resultierende Feldverteilung mit einem geeigneten Lösealgorithmus berechnet. Neben den aufgeführten Modulen stehen noch zahlreiche andere Algorithmen für die verschiedensten Problemstellungen zur Verfügung. Mit Hilfe des Postprozessors **P** ist eine Nachbearbeitung und Visualisierung der numerischen Ergebnisse möglich. Die Farbbilder zeigen Beispiele für ein komplexes Körpermodell vor der Diskretisierung (links), ein diskretisiertes Rechenvolumen mit Körpermodell und Anregungsspulen (mitte) und ein visualisiertes numerisches Beispieldaten (rechts).

Raumrichtungen unterscheiden. Somit sind auch Anisotropien möglich. Weiterhin können dem jeweiligen Problem angepasste Randbedingungen für den numerischen Abschluss der Außenseiten des Rechenvolumens angegeben werden. Diese sind z. B. elektrische oder magnetische Randbedingungen, um ideal elektrisch oder magnetisch leitende Ränder anzunehmen, oder offene Randbedingungen, die einen reflexionsfreien Anschluss des Rechenvolumens an den freien Raum simulieren. Daneben besteht in den einzelnen Modulen die Auswahl verschiedener Lösealgorithmen oder Gleichungstypen, sowie zahlreicher weiterer Parameter, die im gewissen Rahmen eine Anpassung der Löser auf das gestellte Problem zulassen.

Zur Nachbereitung und Visualisierung der mit den Lösermodulen berechneten Feldverteilungen steht das Postprozessormodul **P** zur Verfügung. Es erlaubt neben zahlreichen Möglichkeiten der graphischen Auswertung auch die Berechnung zusätzlicher Feldkomponenten (z. B. Poynting-Vektor) und die Berechnung der Verlustleistung.

Der Vorteil des modularen Aufbaus des Programmpaketes MAFIA liegt in der Möglichkeit, einzelne Module beliebig kombinieren zu können, da jeder Lösealgoritmus eines Moduls das gleiche Gitternetz verwendet, welches zuvor mit dem Netzgenerator **M** erstellt wurde. Dadurch

ist die in Abschnitt 2.6 beschriebene Kopplung elektromagnetischer und thermodynamischer Vorgänge durch ein abwechselndes Aufrufen der Module **W3** und **H3** möglich. Da dies für beliebige Modulkombinationen gilt, lassen sich so auch noch komplexere Simulationsvorgänge aufbauen. Abbildung 2.7 verdeutlicht den modularen Aufbau des Programmpaketes.

Eine weitere Möglichkeit zur Steuerung des numerischen Simulationsvorganges besteht in der Nutzung der integrierten Skriptsprache des Programmpaketes. Dieses sogenannte **MAFIA-Basic** erlaubt die automatische Ablaufsteuerung des Simulationsprozesses und so die skript-gesteuerte Durchführung komplexer Simulationsaufgaben.

Weitergehende Darstellungen findet man in (BECKER ET AL., 1994; KRAWCZYK & WEILAND, 1988; WEILAND ET AL., 1996). Hinweise zu den Parametern und Einstellmöglichkeiten des Frequenzbereichslösers **W3** und des thermodynamischen Lösers **H3** finden sich in der MAFIA-Dokumentation (MAFIA, 2000B; MAFIA, 2000A). Spezielle Fragestellungen bezüglich der Parametereinstellungen und Lösealgorithmenwahl dieser beiden Module werden in den folgenden Abschnitten 5.2 und 5.3 diskutiert.

## 2.8 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde zunächst die Finite-Integrations-Technik vorgestellt und ihre Anwendung bei der Lösung der Maxwell-Gleichungen im Frequenzbereich und der Biowärmeleitungsgleichung im Zeitbereich aufgezeigt. In beiden Fällen ist zunächst eine räumliche Diskretisierung der zu untersuchenden Struktur notwendig. Hierbei wird die Struktur durch ein dreidimensionales kartesisches Gitternetz mit variablen Gitterabständen angenähert. Auf diesem Gitter werden im Fall der Maxwell-Gleichungen auf den Kanten und senkrecht auf den Oberflächen der Gitterzellen die elementaren Feldgrößen definiert und so eine diskrete Repräsentation der Maxwell-Gleichungen ermöglicht. Durch Zusammenfassen aller Komponenten der Feldgrößen ergeben sich die Gitter-Maxwell-Gleichungen als Matrixgleichungen. Ähnlich wird mit den Materialgleichungen verfahren.

Im Frequenzbereich kann aus der ersten und zweiten Gitter-Maxwell-Gleichung die diskrete Curl-Curl-Eigenwertgleichung abgeleitet werden, die den Zusammenhang zwischen einer anregenden Stromdichte und dem daraus resultierenden elektrischen Feld beschreibt. Mit Hilfe verschiedener numerischer Methoden kann dieses lineare Gleichungssystem gelöst werden und Näherungslösungen für die elektrische Feldverteilung ermittelt werden.

Im Zeitbereich wird die Biowärmeleitungsgleichung gelöst, die in guter Näherung Wärmeleitungsprozesse im menschlichen Körper, u. a. auch den Blutfluss, erfasst. Zur Lösung dieser Gleichung wurde ein explizites und ein implizites Verfahren vorgestellt. Im Gegensatz zum restriktiven Stabilitätskriterium für den Zeitschritt des expliziten Verfahrens erlaubt das implizite Verfahren die Wahl eines beliebigen Zeitschrittes. Dies kann für eine adaptive Zeitschrittweitensteuerung ausgenutzt werden, um die Rechenzeit bei thermodynamischen Problemen mit konstanter Wärmeleistung deutlich zu verkürzen. Einschränkungen dieses Verfahrens wurden vorgestellt und Lösungsansätze aufgezeigt.

Abschließend wurde das Programmpaket MAFIA beschrieben, mit dem die numerischen Probleme in dieser Arbeit gelöst wurden. Sein modularer Aufbau erlaubt die Kopplung mehrerer numerischer Prozesse hintereinander. Damit ist die Berechnung gekoppelter elektrodynamischer und thermodynamischer Probleme möglich.



---

## Kapitel 3

# Dielektrische Eigenschaften von Körpergewebe

---

### 3.1 Einführung

Die Berechnung elektromagnetischer und thermischer Felder in Modellen des menschlichen Körpers ist nur mit Kenntnis einiger physikalischer Eigenschaften der jeweiligen Gewebetypen möglich. Einige dieser Größen sind frequenzabhängig. Dazu zählen z. B. die Leitfähigkeit und die Permittivität, die auch die dielektrischen Eigenschaften genannt werden. Andere Parameter, wie die Dichte, die spezifische Wärmekapazität oder die Wärmeleitfähigkeit sind frequenzunabhängig.

Die frequenzabhängigen dielektrischen Eigenschaften geben unter anderem an, wie gut ein Gewebetyp bei der jeweilig betrachteten Frequenz leitet und damit verbunden, wie groß z. B. die dielektrischen Verluste im Gewebe sind. Somit beeinflussen diese Eigenschaften direkt den Verlauf und die Stärke des resultierenden elektrischen Feldes im Inneren des Körpermodells bei einer Wechselwirkung mit einem äußeren angelegten elektromagnetischen Wechselfeld. Vor der numerischen Berechnung sind daher zunächst die entsprechenden dielektrischen Eigenschaften der in den Modellen verwendeten Gewebetypen zu ermitteln. Dazu stehen Tabellen mit experimentellen Daten sowie analytische mathematische Modelle zur Verfügung, die auf diesen Messdaten aufbauen und eine Integration von Algorithmen zur näherungsweisen Bestimmung dieser Parameter in bestehende Software erlauben.

Inhalt dieses Kapitels ist zunächst ein kurzer historischer Überblick mit wichtigen Arbeiten zur Bestimmung der dielektrischen Eigenschaften von biologischem Gewebe. Danach wird auf die Ableitung wichtiger physikalischer Größen bei sinusförmiger Feldanregung in Bezug auf die dielektrischen Parameter und ihre Zusammenhänge eingegangen, gefolgt von einer Definition und Erläuterung der zum Verständnis wichtigen Begriffe Polarisation und Dispersion. Dies wird ergänzt durch eine Darstellung der verschiedenen Dispersionstypen und ihrer möglichen Ursachen auf zellulärer Ebene. Im Anschluss daran werden die physikalischen Gleichungen angegeben, mit denen sich das Dispersionsverhalten von menschlichem Gewebe annähernd beschreiben lässt. Dies führt dann schließlich zur Ableitung der Cole-Cole-Gleichung und ihrer Anwendung in der Praxis nach GABRIEL ET AL. (1996C). Eine Diskussion dieser von GABRIEL ET AL. abgeleiteten Cole-Cole-Gleichung und der festgelegten Gleichungsparameter ergänzt die Darstellung. Das

Kapitel wird mit einigen Bemerkungen über die Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Parameter von biologischem Gewebe abgeschlossen, da dies bei numerischen thermodynamischen Betrachtungen eine Rolle spielen kann.

## 3.2 Historischer Überblick

Die Bestimmung der dielektrischen Eigenschaften von Körpergewebe ist für die medizintechnische Forschung von großer Bedeutung. Darüber hinaus ist die Kenntnis dieser frequenzabhängigen Größen für die Durchführung numerischer Simulationen mit Modellen des menschlichen Körpers unbedingt notwendig. In einem Zeitraum von inzwischen mehr als hundert Jahren sind daher zahlreiche Forschungsarbeiten zu diesem Thema erschienen; einige besonders interessante von ihnen seien an dieser Stelle erwähnt.

Bereits in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts wurden von dem Berliner Physiologen Johannes Peter Müller in Arbeiten über die anisotrope Leitfähigkeit von Muskelgewebe, die kapazitiven Eigenschaften von Körpergewebe und darüber hinaus auch Erkenntnisse über Impedanzveränderungen von Muskelgewebe durch Erregung berichtet (PALKO & GALWAS, 1999).

Im Jahre 1910 wurde von Rudolf Höber, Professor für Physiologie an der Universität in Kiel, zum ersten Mal die kapazitive Impedanz von roten Blutkörperchen gemessen. Aufgrund seiner Erkenntnisse schloss er darauf, dass die Blutkörperchen im Prinzip aus einer dünnen dielektrischen Umhüllung bestehen, die einen salzwasserähnlichen Elektrolyten umschließen. Im Rahmen seiner Untersuchungen entdeckte er auch die Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit des Blutes (HÖBER, 1910), die in späteren Jahren von SCHWAN (1957) klassifiziert wurde.

Einige Jahre später konnte Hugo Fricke die ersten Werte für die Kapazität der Zellmembran von roten Blutkörperchen angeben (FRICKE, 1925). In seiner Arbeit aus dem Jahre 1932 beschreibt Hugo Fricke den Mechanismus der elektrolytischen Polarisation, den er für die Veränderung der dielektrischen Eigenschaften von Zellen und Gewebe im Hochfrequenzbereich verantwortlich machte (FRICKE, 1932).

Parallel zu diesen Arbeiten wurde die Anwendung elektrischer Felder für die Diathermie und andere Verfahren erforscht. Fundamentale Arbeiten hierzu wurden von Jaques-Arsène d'Arsonval, einem französischen Physiologen, am Anfang des neunzehnten Jahrhunderts geleistet. Nach dem zweiten Weltkrieg entwickelte sich dieses Feld in Richtung der Hyperthermie und Thermotherapie (PALKO & GALWAS, 1999)

Durch den Fortschritt der Forschungen über die dielektrischen Eigenschaften von biologischen Geweben konnten eine Vielzahl an weiteren therapeutischen und diagnostischen Verfahren entwickelt werden. Ausgehend von elementaren Arbeiten wie z. B. von SCHWAN (1957) wurden dielektrische Parameter in umfangreichen experimentellen Untersuchungen von verschiedenen biologischen Geweben in einem großen Frequenzbereich ermittelt und veröffentlicht. Neben der umfassenden Sammlung genereller physikalischer Eigenschaften von Körpergewebe von DUCK (1990), bieten die Übersichtsartikel von PETHIG (1984) und GABRIEL ET AL. (1996A) eine der umfangreichsten Zusammenstellungen experimentell ermittelter dielektrischer Parameter von menschlichem Körpergewebe.

Darüber hinaus wurden neben experimentellen Studien auch zahlreiche Modelle zum Verständnis der Frequenzabhängigkeit dielektrischer Gewebeparameter erstellt. Experimentelle Untersuchungen zeigten, dass die dielektrischen Parameter sich in gewissen Frequenzintervallen relativ

konstant verhalten, wohingegen in anderen Frequenzbereichen sich starke Änderungen in den Messwerten ergaben. Für die Frequenzabhängigkeit der dielektrischen Parameter, die mit dem Begriff *Dispersion* bezeichnet wird, wurde von K. S. Cole und R. H. Cole im Jahr 1941 eine Gleichung eingeführt, mit der sich die Beobachtungen mathematisch beschreiben ließen (COLE & COLE, 1941).

Diese Gleichung wurde von GABRIEL ET AL. (1996C) aufgegriffen und die darin enthaltenen Parameter anhand der vorhandenen experimentellen Daten aus GABRIEL ET AL. (1996A) und GABRIEL ET AL. (1996B) angepasst und parametrisiert, so dass heute für eine große Anzahl an verschiedenen Körpergeweben in einem großen Frequenzbereich die dielektrischen Parameter anhand der angepassten Cole-Cole-Gleichungen angegeben werden können, die im übernächsten Abschnitt hergeleitet werden.

Bei Betrachtung der dielektrischen Parameter wird immer von lebendem Gewebe ausgegangen, denn jedes Gewebe zeigt nach dem biologischen Tod des Organismus zeitabhängige Veränderungen in seinem dielektrischen Verhalten. Auf diese Eigenschaften soll hier nicht näher eingegangen werden, da in den numerischen Modellen nur lebendiges Gewebe betrachtet wird. Daher sei an dieser Stelle für weitere Erläuterungen auf die Arbeit von DUCK (1990) verwiesen.

## 3.3 Physikalische Größen und Effekte

### 3.3.1 Komplexe Permittivität und Leitfähigkeit

Die Wechselwirkung eines elektrischen Stromes mit biologischem Gewebe wird in erster Linie durch die Gewebebestandteile bestimmt, welche wiederum durch den Stromfluss beeinflusst werden können. Die beobachtbaren elektrischen Eigenschaften sind daher Ausdruck der Struktur und Zusammensetzung dieser Gewebe. Da biologische Gewebe in der Regel nicht magnetisch sind, beeinflussen die elektrischen Ströme die Zellbestandteile, die entweder eine elektrische Ladung tragen oder ein elektrisches Dipolmoment besitzen. Als Ladungsträger kommen in erster Linie Ionen in den intra- und extrazellulären Flüssigkeiten in Frage. Den größten Beitrag zu den Dipolmomenten liefern die polaren Wassermoleküle in diesen Flüssigkeiten und die Lipidschichten der Zellmembranen. Die beweglichen Ionen in den Flüssigkeiten führen auf der einen Seite zu einer messbaren Leitfähigkeit. Auf der anderen Seite erzeugen die elektrischen Dipole verschiedene ebenfalls messbare dielektrische Relaxationsphänomene. Obwohl das Adjektiv *dielektrisch* für Stoffe Verwendung findet, die in der Lage sind elektrostatische Energie zu speichern, wird es auch für biologische Gewebe verwendet, die in einem elektrischen Feld polarisierbar sind.

Die Bestimmung dielektrischer Parameter biologischer Gewebe erfolgt bei Frequenzen unter einigen Megahertz in kleinen Messzellen mit einfacher Geometrie in Vierelektrodenmesstechnik. Über zwei Elektroden wird ein konstanter Wechselstrom in das Gewebe eingeprägt. An den beiden anderen Elektroden wird der resultierende Spannungsabfall gemessen. Unter Annahme eines elektrischen Ersatzschaltbildes lassen sich aus der gemessenen Spannungsamplitude und der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung die Größen für die Kapazitäten und Widerstände des Ersatzschaltbildes ermitteln. Als einfaches Ersatzschaltbild dient z. B. eine Parallelschaltung eines Kondensators und eines Widerstandes. Mit Hilfe der geometrischen Abmessungen der Messzelle können dann unter Annahme einer einfachen Plattenkondensator- und Widerstandsandsanordnung die Leitfähigkeit und Permittivität bestimmt werden. Bei Frequenzen im oberen Megahertzbereich werden Koaxialmessköpfe verwendet, die direkt mit der Probe

in Kontakt gebracht werden. Die dielektrischen Parameter werden bei diesem Messverfahren über die Reflexionseigenschaften der Gewebeproben bestimmt. Ausführliche Darstellungen hierzu finden sich bei PAŁKO UND GALWAS (1999) und GABRIEL ET AL. (1996B). Eine numerische Betrachtung zu dieser Thematik, die Themen behandelt, die nicht in diesem Kapitel abgedeckt werden, findet sich bei GOLOMBECK ET AL. (2002B).

Durch die Analogie zwischen verlustbehafteten Dielektrika und biologischem Gewebe lassen sich die dielektrischen Eigenschaften von Gewebe durch die relative Permittivität  $\varepsilon_r$  und die Leitfähigkeit  $\sigma$  beschreiben. Bei zeitharmonischer Feldanregung werden aber zweckmäßigerweise die komplexe relative Permittivität  $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$  und die komplexe Leitfähigkeit  $\underline{\sigma}(\omega)$  als frequenzabhängige Größen eingeführt<sup>1</sup>. Das Verständnis der Komponenten der komplexen Größen wird hierbei gemäß der gängigen Literatur entsprechend beschrieben (RIGAUD ET AL., 1996; PAŁKO & GALWAS, 1999; GABRIEL ET AL., 1996A; PETHIG, 1991; DURNEY & CHRISTENSEN, 2000).

Die komplexe relative Permittivität  $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$  ist definiert als:

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon'_r(\omega) - j\varepsilon''_r(\omega) . \quad (3.1)$$

Der Realteil  $\varepsilon'_r(\omega)$  beschreibt hierbei die Fähigkeit des Gewebes, elektrische Feldenergie zu speichern. Der Imaginärteil  $\varepsilon''_r(\omega)$  wird als *Verlustfaktor* bezeichnet und gibt neben den Jouleschen Verlusten durch den elektrischen Stromfluss einen zusätzlichen Energieverlust an, der durch die Reibung der elektrischen Dipole bei ihren Rotationsbewegungen verursacht wird, die durch das einstrahlende elektromagnetische Wechselfeld entstehen. Das Verhältnis  $\varepsilon'_r(\omega)/\varepsilon''_r(\omega)$  wird auch als *Verlustwinkel*  $\tan\delta$  bezeichnet.

Analog zur komplexen Permittivität kann eine komplexe Leitfähigkeit eingeführt werden<sup>2</sup> (DUCK, 1990):

$$\underline{\sigma}(\omega) = \sigma'(\omega) + j\sigma''(\omega) . \quad (3.2)$$

Beide Größen können äquivalent zur Beschreibung der dielektrischen Gewebeparameter verwendet werden. Die Gesamtstromdichte  $\vec{J}_g$  durch ein beliebiges biologisches Gewebe mit endlicher Leitfähigkeit wird bei zeitharmonischer Feldanregung durch folgenden Zusammenhang zwischen komplexer Leitfähigkeit  $\underline{\sigma}(\omega)$  und komplexem elektrischen Feld  $\vec{E}$  ausgedrückt:

$$\vec{J}_g = \underline{\sigma}(\omega) \cdot \vec{E} . \quad (3.3)$$

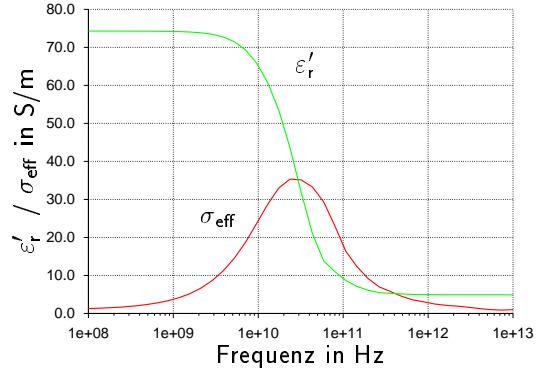
Der Realteil  $\sigma'(\omega)$  der komplexen Leitfähigkeit wird der sogenannten *Leitungsstromdichte* zugeordnet. Diese Stromdichte entsteht zum einen durch eine statische frequenzunabhängige Ionenleitfähigkeit  $\sigma_s$  des Gewebes und eine frequenzabhängige Wechselstromleitfähigkeit verursacht durch den Verlustfaktor  $\varepsilon''_r(\omega)$ . Die Leitungsstromdichte ist verantwortlich für die Jouleschen Verluste und damit die Erwärmung des Gewebes. Der Realteil der komplexen Leitfähigkeit kann daher auch geschrieben werden als:

$$\sigma'(\omega) = \sigma_s + \omega\varepsilon_0\varepsilon''_r(\omega) . \quad (3.4)$$

<sup>1</sup>Komplexe Größen werden in dieser Arbeit stets durch einen Unterstrich gekennzeichnet

<sup>2</sup>Hierbei ist die Vorzeichenkonvention im Vergleich zu Gleichung (3.1) zu beachten.

**Abbildung 3.1:** Relative Permittivität (grüne Kurve) und effektive Leitfähigkeit (rote Kurve) einer Kochsalzlösung (0,47% NaCl) bei einer Temperatur von 37°C. Im Bereich von einigen Gigahertz können die Wassermoleküle einem äußeren elektrischen Feld nicht mehr folgen und die Permittivität wird kleiner. In diesem Frequenzbereich nehmen die Reibungsverluste zu und die effektive Leitfähigkeit steigt zunächst an und fällt dann wieder ab.



Der Imaginärteil  $\sigma''(\omega)$  der komplexen Leitfähigkeit gibt die sogenannte *Verschiebungsstromdichte* im Gewebe an. Sie verursacht einen reinen Blindleistungsanteil und trägt daher nicht zur Erwärmung des Gewebes bei. Für den Imaginärteil gilt:

$$\sigma''(\omega) = \omega \varepsilon_0 \varepsilon'_r(\omega) . \quad (3.5)$$

Als Zusammenhang zwischen komplexer Leitfähigkeit und komplexer relativer Permittivität ergibt sich dann:

$$\underline{\sigma}(\omega) = \sigma_s + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) . \quad (3.6)$$

Sammlungen mit experimentellen Messdaten von Körpergewebe, wie z. B. die von GABRIEL ET AL. (1996A), geben oftmals nur die relative Permittivität  $\varepsilon_r$  und die Leitfähigkeit  $\sigma$  an. In der Regel entspricht die Angabe für die relative Permittivität gerade dem Realteil der komplexen relativen Permittivität  $\varepsilon'_r(\omega)$ . Da es keine festen Konventionen gibt, ist die Wahl der Namen für die einzelnen Größen in der Literatur uneinheitlich. So ist z. B. oftmals auch der Gebrauch einer *effektiven Leitfähigkeit*  $\sigma_{\text{eff}}(\omega)$  üblich, die gleich dem in Gleichung (3.4) definierten Realteil  $\sigma'(\omega)$  der komplexen Leitfähigkeit  $\underline{\sigma}(\omega)$  ist, der zusätzlich die statische Ionenleitfähigkeit  $\sigma_s$  enthält. Die statische Ionenleitfähigkeit  $\sigma_s$  wird bei Messungen oft nicht getrennt erfasst und wird daher nicht einzeln angegeben. Im nächsten Abschnitt wird die Frequenzabhängigkeit der relativen Permittivität und der Leitfähigkeit diskutiert.

### 3.3.2 Polarisation und Dispersion

Um die Effekte zu verstehen, die sich bei einer Wechselwirkung eines elektromagnetischen Feldes mit Gewebe ergeben, muss zunächst der Begriff der *Polarisation* eingeführt werden. Alle dielektrischen Phänomene sind dabei direkt mit einer Polarisation eines Materials unter dem Einfluss eines äußeren elektrischen Feldes verknüpft. Manche atomare Teilchen besitzen aufgrund ihrer Struktur auch im feldfreien Raum ein Dipolmoment (z. B. Wassermoleküle). Da aber die Wärmebewegung die Richtungen einer großen Anzahl dieser Dipole beliebig im Raum verteilt, besteht ohne angelegtes elektrisches Feld keine dielektrische Polarisation.

Der Polarisationsmechanismus, der in Gewebe im Hochfrequenz- und Mikrowellenbereich dominant ist, ist die *Orientierungspolarisation*. Bei diesem Polarisationsmechanismus richten sich

Moleküle mit einem elektrischen Dipolmoment verursacht durch die Molekülstruktur teilweise in einem angelegten äußeren elektrischen Feld zu diesem entgegengesetzt aus<sup>3</sup>. Diese Einstellung benötigt in einem viskosen Medium eine gewisse Zeit.

Bei einem zeitharmonischen äußeren elektrischen Feld versuchen die Dipole der Änderung des äußeren Feldes zu folgen. Bei ansteigender Frequenz zeigen sich im Verlauf der dielektrischen Parameter Bereiche, in denen die Werte eine starke Veränderung erfahren. Die Änderung der dielektrischen Parameter wird auch *Dispersion* genannt.

Wenn die Frequenz des äußeren Feldes kontinuierlich erhöht wird, wird mit der Zeit ein Punkt erreicht, an dem die elektrischen Dipole im Gewebe den Feldveränderungen nicht mehr schnell genug folgen können. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass sich der Rotationswinkel der elektrischen Dipole um die eigene Achse mit steigender Frequenz mehr und mehr verringert, da die Polarisation dem äußeren elektrischen Feld immer stärker nachhinkt. Dadurch verringert sich die Polarisierbarkeit des Gewebes. Durch die Verringerung der Polarisierbarkeit wird auch die Energie menge kleiner, die im Gewebe gespeichert werden kann. Dies ist gleichbedeutend mit einer Verkleinerung des Realteils  $\epsilon'_r(\omega)$  der komplexen relativen Permittivität, die, wie in Abschnitt 3.3.1 erklärt wurde, ein Maß für die Polarisierbarkeit eines Gewebes ist.

Steigt die Frequenz des äußeren elektrischen Feldes an, so wird nicht mehr alle Energie zur vollständigen Orientierung der Dipole verwendet, sondern es erhöht sich zusätzlich der Energieverlust im Gewebe durch die Rotation und zufällige thermische Bewegung der Moleküle mit einem Dipolmoment. Dies zeigt sich bei Messungen durch ein Ansteigen der effektiven Leitfähigkeit wie in Gleichung (3.4) beschrieben wurde.

Dies verdeutlicht Abbildung 3.1 am Beispiel der Dispersion einer Kochsalzlösung mit einer Temperatur von 37 °C. Die Parameter zur Berechnung der Kurven stammen aus der Arbeit von STOGRYN (1971). Im Bereich von einigen Gigahertz können die Wassermoleküle dem äußeren elektrischen Feld nicht mehr folgen. Daher verringert sich die Gesamtpolarisation der Lösung und die relative Permittivität fällt mit steigender Frequenz ab. Dies führt zu einem Anstieg der dielektrischen Verluste und damit zu einer Erhöhung der effektiven Leitfähigkeit durch Vergrößerung des imaginären Anteils der komplexen relativen Permittivität  $\epsilon'_r(\omega)$ .

Steigt die Frequenz des äußeren Feldes weiter an, so nimmt damit die Auslenkung der Dipole immer weiter ab. Irgendwann wird dann eine Frequenz erreicht, ab der die dielektrischen Verluste wieder geringer werden. Die Kurve der effektiven Leitfähigkeit erreicht ein Maximum und fällt dann wieder ab, wie in Abbildung 3.1 zu sehen ist. Diese „Resonanzfrequenz“ kann auch gezielt zur Energiedeposition genutzt werden, wie dies z. B. in Mikrowellenherden der Fall ist und dort einen gewünschten Effekt darstellt. Bei biologischem Gewebe treten mehrere Dispersionseffekte auf, die im folgenden Unterkapitel vorgestellt werden.

## 3.4 Gewebeeigenschaften und mathematische Modelle

### 3.4.1 Dispersionsbereiche von biologischem Gewebe

Bei biologischen Geweben werden in der Regel drei Dispersionsbereiche unterschieden. In einigen Quellen werden auch vier Dispersionsbereiche genannt (z. B. bei RIGAUD ET AL. (1996)). Die Dispersionsbereiche werden mit den griechischen Buchstaben  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  gekennzeichnet.

---

<sup>3</sup>Die Anzahl der Dipole, die sich parallel zur Feldrichtung ausrichten, ist aufgrund der statistisch verteilten Wärmebewegung temperaturabhängig. Kühlst man das Gewebe ab, so erhöht sich die Orientierungspolarisation.

Im Frequenzbereich zwischen zehn Hertz und einigen Kilohertz tritt bei biologischen Geweben die  $\alpha$ -Dispersion auf. Die Ursachen dieses Dispersionsmechanismus sind noch nicht vollständig verstanden. Im Bereich der  $\alpha$ -Dispersion werden bei manchen Gewebetypen Änderungen des Realteils der komplexen relativen Permittivität von einigen Zehnerpotenzen beobachtet. Einige Autoren vermuten hierbei eine Aufladung der Zellmembran aufgrund von Moleküldiffusion oder Ionenleitung durch die Zellmembran und die Entstehung von elektrochemischen Doppelschichten (RIGAUD ET AL., 1996; PALKO & GALWAS, 1999; SCHWAN, 1957). Allerdings sind die angegebenen Werte für die relative Permittivität, die bei kleinen Frequenzen Größenordnungen von  $10^7$  erreichen kann, sehr fragwürdig, da dies implizieren würde, dass biologisches Gewebe einen idealen Energiespeicher mit einer großen Kapazität darstellen würde. Ein Vergleich mit tabellierten Werten für Dielektrika zeigt, dass dielektrische Werkstoffe in der Regel Permittivitäten zwischen  $10^0$  und  $10^2$  besitzen (KUCHLING, 1991). Andere Autoren weisen in ihren Arbeiten auf Schwierigkeiten bei der Bestimmungen der relativen Permittivität bei niedrigen Frequenzen hin aufgrund auftretender Polarisationseffekte an den Messelektroden, die nur schwer zu kompensieren sind. Aus diesem Grund werden die Messwerte nur mit dem Hinweis auf große mögliche Abweichungen angegeben (GABRIEL ET AL., 1996B; DUCK, 1990).

Die  $\beta$ -Dispersion wird im Bereich von einigen Kilohertz bis in den Megahertzbereich hinein beobachtet. Für die  $\beta$ -Dispersion werden hauptsächlich zwei Mechanismen verantwortlich gemacht. Zum einen trennen die Zellmembranen aufgrund der Zellstruktur zwei gut leitfähige Bereiche voneinander – den intra- und den extrazellulären Raum. Wenn die Frequenz des äußeren Feldes zunimmt, verringert sich der Blindwiderstand der Zellmembran. Dadurch vergrößert sich der Stromfluss durch das intrazelluläre Medium, bis die Zellmembran komplett kurzgeschlossen ist. Dadurch ergibt sich ein deutlicher Anstieg in der messbaren effektiven Leitfähigkeit. Durch die Frequenzerhöhung können sich die Zellmembranen auch nicht mehr komplett aufladen, was gleichzeitig zu einer Verringerung der relativen Permittivität führt. Der andere Mechanismus der eher im höheren Frequenzbereich der  $\beta$ -Dispersion zum Tragen kommt ist die Orientierungspolarisation von Makromolekülen, Proteinen und Zellorganellen. Teilweise wird dieser Dispersionseffekt noch in zwei Untertypen – die  $\beta_1$ - und  $\beta_2$ -Dispersion – aufgeteilt (RIGAUD ET AL., 1996; PETHIG, 1991).

Im Mikrowellenbereich dominiert die  $\gamma$ -Dispersion. In diesem Frequenzbereich sind die Zellmembranen komplett kurzgeschlossen. Der Anstieg der effektiven Leitfähigkeit, verbunden mit einem weiteren Abfall der relativen Permittivität wird durch die polaren Eigenschaften der Wassermoleküle im Gewebe verursacht, die bei diesen Frequenzen ihren Eigenschwingungsbereich erreichen. Einige Autoren definieren in diesem Frequenzbereich zusätzlich eine  $\delta$ -Dispersion, die sie mit Schwingungen von Aminosäuren und geladenen Seitenketten von Proteinen in Verbindung bringen (SCHEPPS & FOSTER, 1980).

Die Mechanismen der  $\beta$ - und  $\gamma$ -Dispersion sind heutzutage gut verstanden. Im Bereich der  $\alpha$ -Dispersion existieren noch zahlreiche offene Fragen. Das Hauptproblem in diesem Frequenzbereich sind die bereits angesprochenen großen Werte für die relative Permittivität des Gewebes. Trotz einiger Modellvorstellungen und Erklärungsversuche existiert bis heute noch keine zufriedenstellende Beschreibung dieses Phänomens. Dazu wäre dann auch die Frage zu erörtern, in wie weit die formelmäßige Definition der relativen Permittivität in Gleichung (3.5) zum Verständnis der großen Werte ausreicht. Trotz der ungeklärten Fragen existieren einige Modelle, um die Abhängigkeit der dielektrischen Parameter von der Feldfrequenz zu beschreiben, wie im nächsten Abschnitt demonstriert wird.

### 3.4.2 Die Debye- und die Cole-Cole-Gleichung

Die Polarisierung der Elektronen und des Atomkerns findet fast augenblicklich statt. Im Gegensatz dazu braucht das Molekül aufgrund seiner im Vergleich dazu langsam Drehbewegung eine gewisse Zeit, bis es sich zum Feld ausgerichtet hat. Dieser Zeitverlauf besitzt einen exponentiellen Charakter mit einer Zeitkonstante  $\tau$ , die auch *Relaxationszeit* genannt wird.

Die dipolare Orientierung kann mit einem mechanischen Schwingungssystem erster Ordnung verglichen werden. Dabei wird angenommen, dass die Polarisierung sich nach Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes exponentiell mit der Zeit einstellt. Die Relaxation nach Debye ist ein reiner viskoser Prozess ohne elastische Anteile und kann daher durch eine Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt werden (DEBYE, 1929). Für die Orientierungspolarisation  $P_{Or}$  ergibt sich dann folgende Gleichung:

$$\frac{P_{Or}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} (P_S - P_\infty - P_{Or}(t)) . \quad (3.7)$$

In dieser Gleichung stellt  $\tau$  die Relaxationszeit dar. Die Größe  $P_S$  ist die resultierende Polarisierung bei statischem elektrischen Feld, die sich nach einer langen Einwirkzeit einstellt.  $P_\infty$  gibt den Anteil der instantanen Orientierungspolarisation aufgrund der schnellen Polarisierung der Elektronenwolken an. Bei sinusförmiger Feldanregung ergibt sich als Lösung dieser Gleichung:

$$P_{Or}(\omega) = \frac{P_S - P_\infty}{1 + j\omega\tau} . \quad (3.8)$$

Berücksichtigt man zusätzlich den instantanen Anteil der Polarisierung, so ergibt sich als gesamte komplexe Polarisierung des Gewebes (RIGAUD ET AL., 1996):

$$P(\omega) = p_\infty + \frac{P_S - P_\infty}{1 + j\omega\tau} . \quad (3.9)$$

Vernachlässigt man im ersten Schritt der folgenden Betrachtung zunächst die statische Ionenleitfähigkeit, so kann für die komplexe relative Permittivität nach Gleichung (3.9) folgender Ausdruck abgeleitet werden (PAŁKO & GALWAS, 1999; GABRIEL ET AL., 1996C):

$$\underline{\varepsilon}'(\omega) = \varepsilon'_{r\infty} + \frac{\varepsilon'_{rS} - \varepsilon'_{r\infty}}{1 + j\omega\tau} . \quad (3.10)$$

Hierbei ist für die Größe  $\varepsilon'_{r\infty}$  die Permittivität des Gewebes bei unendlich hoher Frequenz einzusetzen, wohingegen  $\varepsilon'_{rS}$  den Wert für die Permittivität bei sehr kleinen Frequenzen zugewiesen bekommt. Bildet man von dieser Gleichung den Real- und Imaginärteil und berücksichtigt die statische Ionenleitfähigkeit  $\sigma_s$  des Gewebes, so lassen sich analog zu den experimentellen Studien mit dem Realteil die relative Permittivität  $\varepsilon'_r(\omega)$  und mit dem Imaginärteil unter Verwendung von Gleichung (3.4) die effektive Leitfähigkeit  $\sigma_{eff}(\omega) = \sigma'(\omega)$  angeben:

$$\varepsilon'_r(\omega) = \varepsilon'_{r\infty} + \frac{\varepsilon'_{rS} - \varepsilon'_{r\infty}}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{\text{eff}}(\omega) = \sigma_s + \frac{\varepsilon_0 \tau (\varepsilon'_{\text{rS}} - \varepsilon'_{\text{r}\infty}) \omega^2}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (3.12)$$

Diese Debye-Gleichungen berücksichtigen aber nur eine Relaxationszeit  $\tau$ . Da Körpergewebe mehrere Dispersionsbereiche zeigt, ist es erforderlich, Gleichung (3.10) zu erweitern. In der Arbeit von HURT (1985) wird eine Gleichung vorgestellt, bei der fünf Debye-Terme aufsummiert werden und zusätzlich die statische Ionenleitfähigkeit  $\sigma_s$  des Gewebes berücksichtigt wird:

$$\underline{\varepsilon}'(\omega) = \varepsilon'_{\text{r}\infty} + \sum_{n=1}^5 \frac{\varepsilon'_{\text{rS},n} - \varepsilon'_{\text{r}\infty}}{1 + j\omega\tau_n} + \frac{\sigma_s}{j\omega\varepsilon_0^2}. \quad (3.13)$$

Die beobachteten Dispersionsmechanismen sind aber so komplex, dass jeder einzelne Dispersionsbereich eine gewisse Verbreiterung erfahren kann. Mit Hilfe eines empirischen Verteilungsparameters  $\alpha$  kann in Gleichung (3.10) eine Verbreiterung der Dispersion hinzugefügt werden. Diese empirische Gleichung geht auf die Arbeiten von COLE UND COLE (1941) zurück und wird daher *Cole-Cole-Gleichung* genannt:

$$\underline{\varepsilon}'(\omega) = \varepsilon'_{\text{r}\infty} + \frac{\varepsilon'_{\text{rS}} - \varepsilon'_{\text{r}\infty}}{1 + (j\omega\tau)^{1-\alpha}}. \quad (3.14)$$

Kombiniert man, wie in der Arbeit von GABRIEL ET AL. (1996C) vorgeschlagen die Gleichungen (3.13) und (3.14) miteinander, so erhält man die mit einer Summe von Dispersionstermen erweiterte Cole-Cole-Gleichung:

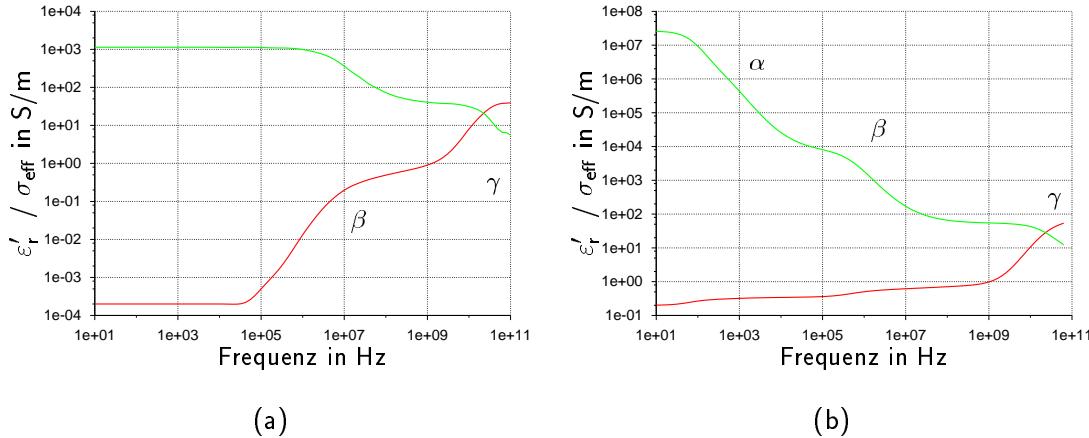
$$\underline{\varepsilon}'(\omega) = \varepsilon'_{\text{r}\infty} + \sum_n \frac{\varepsilon'_{\text{rS},n} - \varepsilon'_{\text{r}\infty}}{1 + (j\omega\tau_n)^{1-\alpha_n}} + \frac{\sigma_s}{j\omega\varepsilon_0^2}. \quad (3.15)$$

Die Anzahl  $n$  der einzelnen Dispersionsterme ist dabei noch nicht von vorneherein festgelegt, sondern ergibt sich aus der jeweiligen Fragestellung. Die Anwendung dieser Gleichung wird im nächsten Abschnitt gezeigt und diskutiert.

### 3.4.3 Anwendung der Cole-Cole-Gleichung nach Gabriel

Für die Durchführung numerischer Experimente in einem großen Frequenzbereich ist es vorteilhaft, wenn die dielektrischen Parameter für die verschiedenen Körpergewebetypen durch ein Programm für die jeweilige Frequenz berechnet werden können. Dies ist mit Hilfe von Gleichung (3.15) möglich, wenn für jeden Gewebetyp die notwendigen Parameter  $\varepsilon'_{\text{r}\infty}$ ,  $\varepsilon'_{\text{rS},n}$ ,  $\tau_n$  und  $\sigma_s$  bekannt sind.

Die Arbeit von GABRIEL ET AL. (1996C) stellt für über 50 verschiedene Gewebetypen die notwendigen Parameter zur Verfügung. Dabei wurden anhand von verfügbaren experimentellen Daten die Parameter von Gleichung (3.15) durch sukzessive Anpassung von Hand ermittelt. Eine Anpassung mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate schied aus, da sich der anzupassende Frequenzbereich über zahlreiche Zehnerpotenzen erstreckte, was eine systematische Abweichung zu kleinen Frequenzen hin ergeben hätte.



**Abbildung 3.2:** Dielektrische Eigenschaften von trockener Haut (a) und Muskelgewebe (b) nach Gabriel. Die Schaubilder wurden mit Hilfe von Gleichung (3.15) erstellt. Die grüne Kurve repräsentiert jeweils den Verlauf der Permittivität  $\epsilon'_r(\omega)$  abhängig von der Frequenz. Die rote Kurve zeigt den Verlauf der effektiven Leitfähigkeit  $\sigma_{\text{eff}}(\omega)$ . In beiden Diagrammen sind die jeweiligen Dispersionbereiche mit dem entsprechenden griechischen Symbol gekennzeichnet (siehe Text). Bei den Werten für trockene Haut fällt auf, dass keine  $\alpha$ -Dispersion erkennbar ist.

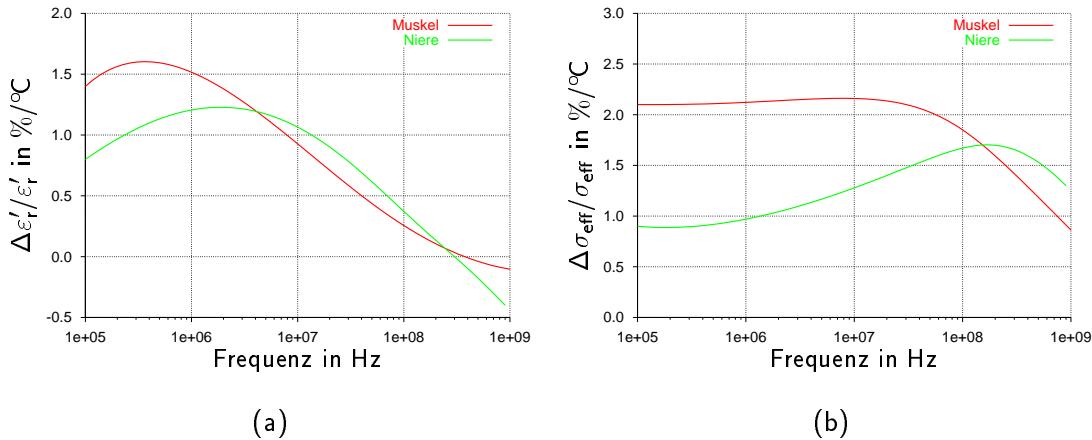
Stattdessen wurde in mehreren Schritten von den hohen zu den niedrigen Frequenzen gearbeitet. Der Wert für  $\epsilon'_{r\infty}$  wurde entweder auf 2,5 oder auf 4 gesetzt, was einem niedrigen oder hohen Wassergehalt des Körpergewebes und damit dem bekannten Verhalten einer wässrigen Lösung entspricht.

Obwohl im untersuchten Frequenzbereich von 10 Hz bis 100 GHz nur drei fundamentale Dispersionbereiche ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) existieren, zeigte sich, dass sich mit einer Cole-Cole-Gleichung mit vier Termen ( $n = 4$ ) bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten erzielen ließ.

Abbildung 3.2 zeigt den Verlauf der Permittivität und der Leitfähigkeit für trockene Haut und Muskelgewebe, die durch Bildung des Real- und Imaginärteils von Gleichung (3.15) und den Parametern von GABRIEL ET AL. (1996C) bestimmt wurden. Muskelgewebe zeigt besonders deutlich die drei Dispersionbereiche  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ , wohingegen bei trockener Haut keine  $\alpha$ -Dispersion erkennbar ist. Die Kurven geben auch die experimentellen Werte in (GABRIEL ET AL., 1996A; GABRIEL ET AL., 1996B; SCHWAN, 1957; PETHIG, 1984) wieder.

Da die experimentellen Vergleichsdaten zum einen einer sehr breiten Streuung unterworfen sind und zum anderen für manche Gewebetypen insbesondere im niederfrequenten Bereich keine Messdaten existieren, geben die mit der erweiterten Cole-Cole-Gleichung (3.15) ermittelten Parameter gute Mittel- oder Schätzwerte an. Die Autoren beurteilen ihre Ergebnisse selbst erst ab einer Frequenz von 1 MHz als zuverlässige Mittelwerte (GABRIEL ET AL., 1996C).

Werte für die dielektrischen Parameter von weiteren Gewebetypen bei verschiedenen Frequenzen, die mit Gleichung (3.15) berechnet wurden, befinden sich in den Tabellen in Anhang B.



**Abbildung 3.3:** Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Parameter am Beispiel von Muskel- (rote Kurven) und Nierengewebe (grüne Kurven). Bild (a) zeigt den Temperaturgradienten der relativen Permittivität  $\epsilon'_r(\omega)$  in Abhängigkeit von der Frequenz des äußeren elektrischen Feldes, Bild (b) den Temperaturgradienten der effektiven Leitfähigkeit  $\sigma_{\text{eff}}(\omega)$  nach (DUCK, 1990). Im Frequenzbereich von 50 MHz bis 200 MHz ändert sich die relative Permittivität  $\epsilon'_r(\omega)$  nur um ca. 1 % pro  $^{\circ}\text{C}$ .

### 3.4.4 Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Parameter

Die aus Gleichung (3.15) resultierenden Werte geben die dielektrischen Parameter bei einer Gewebetemperatur von  $37^{\circ}\text{C}$  wieder. Generell besitzen die dielektrischen Parameter nicht nur eine Frequenzabhängigkeit, sondern sind auch temperaturabhängig. Dies wird aber in Gleichung (3.15) nicht berücksichtigt.

Für biologische Gewebe stehen nur wenige experimentelle Daten zur Verfügung, die speziell die Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Parameter betrachten. Die wichtigsten Beiträge zu dieser Problematik finden sich bei SCHWAN (1957), SCHWAN UND FOSTER (1980) und DUCK (1990). In letzterer Arbeit werden anhand der Werte von SCHWAN UND FOSTER Temperaturkoeffizienten für einige Gewebetypen in Abhängigkeit von der Frequenz des äußeren elektrischen Feldes für einen Temperaturbereich von  $20^{\circ}\text{C}$  bis  $40^{\circ}\text{C}$  angegeben.

In der Regel steigt die effektive Leitfähigkeit mit der Temperatur bis zu einer Frequenz von 1 GHz mit bis zu 2 %/ $^{\circ}\text{C}$  an. Der Koeffizient wird erst bei höheren Frequenzen negativ. Die relative Permittivität zeigt nur bis zu 50 MHz einen Anstieg um bis zu 1,5 %/ $^{\circ}\text{C}$  und fällt danach ab. Im Frequenzbereich zwischen 50 MHz und 200 MHz wurden in den meisten Fällen nur sehr kleine Änderungen der Permittivität ( $< 0,3\text{ %}/^{\circ}\text{C}$ ) beobachtet.

Abbildung 3.3 zeigt den Temperaturgradienten der relativen Permittivität  $\epsilon'_r(\omega)$  und effektiven Leitfähigkeit  $\sigma_{\text{eff}}(\omega)$  für Muskel- und Nierengewebe und verdeutlicht die Angaben des letzten Absatzes. Die Daten des Diagramms wurden aus (DUCK, 1990) entnommen.

Da nur sehr wenige Daten zur Verfügung stehen lassen sich für nicht tabellierte Frequenzwerte oder Gewebetypen nur vage Schätzwerte annehmen. Eine Extrapolation aufgrund vorhandener Daten ist daher fraglich. Aus diesen Gründen werden die dielektrischen Parameter für Körpergewebe bei der thermodynamischen Rechnung näherungsweise als konstant angenommen (GUSTRAU, 1997).

### 3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die frequenzabhängigen dielektrischen Eigenschaften von biologischem Gewebe als wichtige physikalische Größe zur Durchführung numerischer Untersuchungen vorgestellt. Dabei wurde zunächst der physikalische Mechanismus der Orientierungspolarisation beschrieben, der zu einem komplexen Dispersionsverhalten der dielektrischen Parameter in einem großen Frequenzbereich führt.

Biologisches Gewebe zeigt in der Regel drei Hauptdispersionsbereiche, die mit den griechischen Buchstaben  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  gekennzeichnet werden und die in dieser Reihenfolge nacheinander bei ansteigender Frequenz eines äußeren angelegten elektrischen Feldes beobachtet werden können. Dabei zeigen aber nicht alle Gewebetypen jede dieser Dispersionen. Jedem Dispersionstyp wurde dann ein Mechanismus auf zellulärer Ebene zugeordnet. Dabei wurde auch auf bislang nicht vollständig geklärte Probleme bei dem Verständnis einzelner Dispersionsmechanismen eingegangen.

Für die Durchführung numerischer Berechnungen in komplexen Modellen des menschlichen Körpers ist es hilfreich, wenn die dielektrischen Parameter mit Hilfe von analytischen Formeln näherungsweise beschrieben werden können und sich so problemlos in bestehende Programme einbinden lassen. Als Grundlage dazu wurde die Arbeit von GABRIEL ET AL. (1996C) beschrieben, in der gezeigt wird, dass sich mit Hilfe einer parametrisch angepassten und erweiterten Cole-Cole-Gleichung die dielektrischen Eigenschaften von biologischem Gewebe in einem großen Frequenzbereich beschreiben lassen.

Das Kapitel wurde mit einer Betrachtung der Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Parameter von Körpergewebe abgeschlossen, da diese Parameter bei Temperaturveränderungen in der Regel nicht konstant sind. Da zu dieser Fragestellung nur wenig Messdaten vorhanden sind, lässt sich keine generelle Aussage für alle Gewebetypen treffen. Bei Muskel- und Nierengewebe wurde eine Temperaturabhängigkeit beobachtet, die selbst frequenzabhängig ist. Es zeigte sich, dass die Veränderungen im betrachteten Frequenzbereich relativ klein ( $< 2\%/\text{°C}$ ) sind, und für die effektive Leitfähigkeit und die relative Permittivität unterschiedliche Verläufe zeigen. Aufgrund des Mangels an Messdaten für weitere Gewebetypen können hier aber nur ungenaue Annahmen gemacht werden. Die dielektrischen Parameter für Körpergewebe werden daher für die numerischen Untersuchungen näherungsweise als konstant angenommen.

---

## Kapitel 4

# Biologische Wirkung elektromagnetischer Felder

---

### 4.1 Einführung

Die Wirkung elektromagnetischer Felder auf die Gesundheit des Menschen ist in den Industriena-  
tionen der westlichen Welt in den letzten Jahren zu einem immer wichtigeren Thema zahlreicher  
Diskussionen geworden. Dies liegt auch in einer oftmals ungenauen Berichterstattung der Me-  
dien. Wissenschaftlich fundierte Kenntnisse und Ergebnisse selbsterkannter Experten werden  
vermischt, so dass der Normalbürger nicht mehr differenzieren kann. Eine vermehrte und einseitige  
Darstellung angeblich krankmachender Effekte in den Medien und dadurch eine generelle  
Erzeugung von Angst und Verwirrung in der Bevölkerung tun ihr übriges und machen eine  
Aufklärung über die tatsächlichen Effekte, Gefahren und Risiken sehr schwierig oder unmöglich  
(DAVID ET AL., 1995).

Eine genaue Kenntnis über die wissenschaftlich abgesicherten Effekte ist aber im Rahmen nu-  
merischer Studien wichtig, um die Wirkungen der berechneten Felder abschätzen zu können  
und die numerischen Ergebnisse hinsichtlich ihrer Einflüsse auf den menschlichen Körper zu  
interpretieren. Zu den bekannten Wechselwirkungen von elektromagnetischen Feldern mit bio-  
logischem Gewebe gehören z. B. die Induktion von Strömen durch die Ausübung von Kräften  
auf bewegliche Ladungsträger im gut leitfähigen Körpergewebe und dadurch die Stimulation  
erregbarer Strukturen wie Muskel- oder Nervengewebe. Neben der Stimulation kann es auch zur  
Erwärmung von Gewebe durch die Absorption von Leistung aus einem hochfrequenten elektro-  
magnetischen Wechselfeld kommen, die durch Verlustprozesse von sich ausrichtenden Dipolen  
im Wechselfeld entsteht. Maßgeblich für die Art des beobachteten Effektes ist die Frequenz des  
Wechselfelds.

Die Abschnitte dieses Kapitels gliedern sich wie folgt: zunächst werden wichtige Hinweise zur Be-  
schreibung und Klassifikation der Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit dem mensch-  
lichen Körper gegeben. Dabei wird an erster Stelle auf die grundlegenden physikalischen Mecha-  
nismen eingegangen, gefolgt von der Definition einiger gebräuchlicher Fachbegriffe.

Im folgenden werden die wichtigsten Wechselwirkungseffekte vorgestellt. Dazu zählen zum einen  
die Stimulation von Muskel- und Nervengewebe und zum anderen die Erwärmung von Ge-  
webe aufgrund der Leistungsabsorption aus einem elektromagnetischen Wechselfeld. Im Rahmen

der Darstellung wird zunächst auf die Physiologie und im speziellen auf die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit den physiologischen Mechanismen eingegangen. Ein weiterer Schwerpunkt liegt auf der Angabe und Ableitung von Formeln zur Weiterverarbeitung der durch numerische Simulationen gewonnenen Erkenntnisse, so dass eine Interpretation und Bewertung der numerischen Ergebnisse hinsichtlich ihrer physiologischen Wirkung möglich wird. Eine Betrachtung anderer Effekte, die in der wissenschaftlichen Literatur diskutiert werden schließt die Darstellung der wichtigsten Wechselwirkungen ab.

Um die Wechselwirkungen bezüglich ihres Gefährdungspotentials für den Menschen einteilen zu können und damit die untersuchte medizinische Anwendung bewerten zu können ist ein Vergleich der abgeleiteten Ergebnisse mit gängigen Grenzwerten unerlässlich. Dazu werden zum einen die Ableitung von Grenzwerten an einem Beispiel erläutert und die wichtigsten Fachbegriffe definiert. Zum anderen werden die gängigen Grenzwerte angegeben und in verschiedene Klassen eingeteilt. Diese Grenzwerte werden in den folgenden Kapiteln zu einer Bewertung der numerischen Ergebnisse verwendet.

## 4.2 Thermische und athermische Effekte

### 4.2.1 Wechselwirkungsvorgänge und Definition einiger Fachbegriffe

Bei der Wechselwirkung zwischen elektromagnetischen Feldern und lebenden Gewebe unterscheidet man zwei grundlegende Mechanismen - Stimulation und Erwärmung von Gewebe. Im niederfrequenten Bereich wird darüber hinaus zwischen der Wechselwirkung von elektrischen und magnetischen Wechselfeldern unterschieden, wohingegen im Hochfrequenzbereich die Energieabsorption aus dem elektromagnetischen Feld betrachtet wird.

Ein elektrisches Feld übt auf Ladungsträger Kräfte aus und führt dadurch zu einer Verschiebung dieser Ladungsträger, was in einem Stromfluß durch das Gewebe resultiert. Weiterhin führt ein elektrisches Feld zu der Bildung von elektrischen Dipolen durch die Ausrichtung gebundener Ladung, sowie zur Orientierung von elektrischen Dipolen, die bereits im Gewebe vorhanden sind. Die Größen dieser Effekte hängen für den Stromfluss von der effektiven Leitfähigkeit (siehe Abschnitt 3.3.2) und für die Polarisation von der relativen Permittivität des Gewebes ab. Externe elektrische Felder führen zusätzlich zur Entstehung von Oberflächenladungen auf der Körperoberfläche, was in einem zusätzlichen Stromfluss durch den Körper resultiert.

Zeitveränderliche magnetische Felder führen über das Induktionsgesetz (2.1) zu elektrischen Feldern und damit zu kreisförmigen Stromflüssen. Der Stromfluss ist umso stärker, je größer der Radius der Stromschleife, sowie die Stärke und Frequenz des magnetischen Wechselfeldes sind. Der Weg des Stromes durch den Körper und die resultierende Stromstärke hängen dabei in erster Linie von der Leitfähigkeit des Gewebes ab (VILLA ET AL., 1991).

Betrachtet man die Wirkungen elektromagnetischer Felder auf den menschlichen Körper, so ist es notwendig einige Begriffe zu definieren und voneinander abzugrenzen. Die Wechselwirkung eines Feldes erzeugt z. B. wie beschrieben durch eine Kraftwirkung eine Verschiebung von Ladungsträgern im Gewebe. Dieser Effekt wird zunächst als *biologische Wirkung* bezeichnet. Die Existenz einer biologischen Wirkung bedeutet aber nicht automatisch, dass sich durch die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit dem Gewebe eine Schädigung des Organismus ergibt.

Effekte, die in unmittelbaren Zusammenhang mit einer Wechselwirkung des Organismus mit einem einwirkenden elektromagnetischen Feld stehen und zu einer nachweisbaren Veränderung oder Schädigung des Gewebes oder einer anderweitigen Beeinträchtigung des Organismus führen, werden als *gesundheitliche Wirkung* bezeichnet. Eine gesundheitliche Wirkung beinhaltet in jedem Fall auch immer eine biologische Wirkung, der Umkehrschluss gilt aber nicht in jedem Fall. Dabei muss beachtet werden, dass gesundheitliche Wirkungen zu therapeutischen Zwecken durchaus erwünscht sein können und daher noch zwischen erwünschten und unerwünschten gesundheitlichen Wirkungen unterschieden werden muss.

Der Punkt, an dem aus einer biologischen Wirkung eine gesundheitliche Wirkung wird, ist von mehreren Parametern abhängig. Eine wichtige Rolle spielt z. B. die Frequenz und die Stärke des elektromagnetischen Wechselfelds. Daneben muss auch berücksichtigt werden, ob das Feld kontinuierlich oder gepulst ist. Falls letzteres zutrifft ist auch zu beachten, welche Pulsform das Feld besitzt. Weiterhin sind noch individuelle Empfindlichkeiten des einzelnen Organismus zu berücksichtigen, da bei jedem Menschen unterschiedliche Schwellenwerte beim Übergang einer biologischen Wirkung zu einer gesundheitlichen Wirkung bestehen. Grenzwerte orientieren sich daher stets an experimentellen Beobachtungen, z. B. dass bei einem Stromfluss unterhalb einer Grenzstromstärke bei keinem Probanden eine Wirkung auftritt.

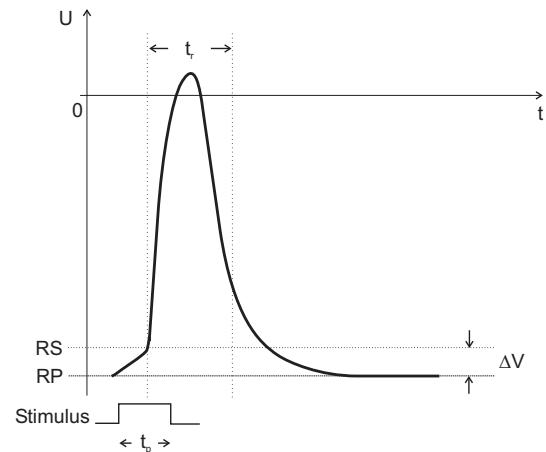
Eine weitere Unterscheidung ist die Einteilung der biologischen Wirkungen in *athermische* und *thermische Effekte*. Thermische Effekte zeigen sich in einer Erwärmung des Körpergewebes durch die Absorption von Energie aus einem elektromagnetischen Feld. Unter athermischen Effekten versteht man alle anderen Effekte, die nicht mit einer Erwärmung von Gewebe einhergehen. Dazu zählen z. B. die Stimulation von Muskel- und Nervengewebe, die Wirkungen auf aktive medizinische Implantate (z. B. Funktionsstörungen von Schrittmachern), aber auch Vermutungen, dass elektromagnetische Felder die Entstehung von Krebs fördern oder zahlreiche psychosomatische Beschwerden auslösen könnten.

Auch hier muss beachtet werden, dass bei einem Auftreten eines dieser Effekte jeweils eine biologische Wirkung vorhanden ist, aber dieses nicht zwingend eine gesundheitliche Wirkung mit sich bringt. So kann z. B. eine Stimulation eines peripheren Nervs nur zu einer ungefährlichen Kontraktion eines Muskels des Bewegungsapparates führen. Gleichwohl kann bei genügender Stärke der Reizung auch tieferliegendes herznahes Gewebe oder sogar das Herz selbst stimuliert werden, was zu einem lebensbedrohlichen Kammerflimmern der Herzmuskulatur führen kann.

Das Auftreten thermischer und athermischer Effekte ist an den Frequenzbereich des elektromagnetischen Feldes gekoppelt. Im niederfrequenten Bereich spielt die Absorption von elektromagnetischer Energie im Gewebe nur eine untergeordnete Rolle, da dort die Effekte, die durch den induzierten Stromfluss hervorgerufen werden überwiegen. Dies ändert sich bei einer Zunahme der Feldfrequenz. Die Fähigkeit mit Strömen Nerven zu stimulieren nimmt ab 1 kHz stark mit der Frequenz ab, so dass dann die thermischen Effekte überwiegen. Dies ist aber nur eine grobe Richtlinie. Oft treten auch Wirkungen auf, die durch thermische und athermische Effekte gemeinsam verursacht werden.

Zur Verdeutlichung dieser Unterschiede werden einige athermische und thermische Effekte in den folgenden Abschnitten erklärt und diskutiert. Dies sind insbesondere die Entstehungsmechanismen von Muskel- und Nervenstimulation sowie die Erwärmung von Gewebe durch elektromagnetische Felder. Danach werden einige Beispiele für weitere athermische Effekte gegeben.

**Abbildung 4.1:** Auslösung eines Aktionpotentials durch einen rechteckförmigen Stimulus. Im Ruhezustand liegt das Zellinnere gegenüber dem Extrazellulärtraum auf einem negativen Potential. Wird durch einen externen Stimulus, der über eine ausreichende Länge  $t_p$  und Stärke verfügt, das Potential vom Ruhepotential RP über die Reizschwelle RS angehoben, so folgt eine spontane Depolarisierung der Zellmembran. Dabei steigt das Potential der Zelle kurzzeitig auf positive Werte an. Während der Refraktärzeit  $t_r$  nach Auslösen des Aktionspotentials ist die Zelle nicht wieder erregbar.



#### 4.2.2 Stimulation von Muskel- und Nervengewebe

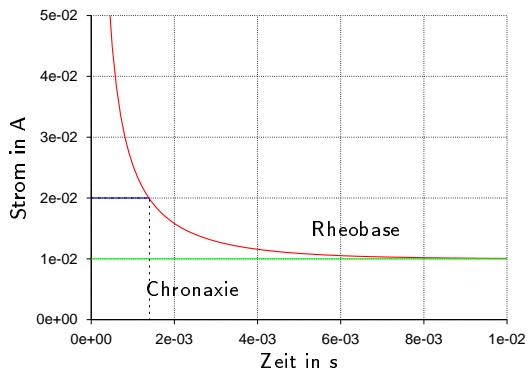
Der menschliche Körper besitzt Nerven- und Muskelzellen, die elektrisch erregbar sind. Im Ruhezustand einer Zelle besteht im Extrazellulärtraum eine größere Natriumionenkonzentration als im Intrazellulärtraum, der einen Überschuss an Kaliumionen enthält. Im Ruhezustand bildet sich so ein Membranpotential aus, bei dem das Zellinnere auf einem negativen Potential von ca. 70 - 90 mV gegen den Extrazellulärtraum liegt (GEDDES, 1995). Daneben bestehen Zellen aus einer hoch isolierenden Phospholipidmembran mit Ionenkanälen, die sich öffnen können, so dass z. B. Natriumionen vom Extrazellulärtraum in den Intrazellulärtraum strömen können. Um eine Zelle zu erregen, muss durch einen Stromfluss im Gewebe das Membranpotential ausgehend von Ruhepotential auf etwa -50 mV erhöht werden. Dies wird auch *Depolarisation* genannt, da sich dadurch das resultierende Potential zwischen Intra- und Extrazellulärtraum verringert (SCHMIDT ET AL., 2000).

An diesem Schwellenpotential wird die Membranladung instabil und baut sich durch schlagartiges Öffnen der Ionenkanäle ab und kehrt durch einen Natriumioneneinstrom ihre Polarität um. Das Potential zwischen Intra- und Extrazellulärtraum wird durch den raschen Natriumioneneinstrom kurzzeitig sogar positiv. Diesen Vorgang der Depolarisation nennt man auch *Erregung*. Die Depolarisationsphase des Aktionspotentials setzt weiterhin selbst Prozesse in Gang, die die Ruhemembranladung wiederherstellen.

Die dadurch entstehende Membranspannung wird auch *Aktionspotential* genannt (SCHMIDT ET AL., 2000). Sie zeichnet sich durch einen sprunghaften Anstieg des Membranpotentials durch die schnell einströmenden Natriumionen aus, der durch einen kurzzeitig später einsetzenden Kaliumionenausstrom gebremst wird. Abbildung 4.1 zeigt beispielhaft die Entstehung eines Aktionspotentials. Diese Erregung kann sich dann durch verschiedene Mechanismen fortpflanzen und wird so auf benachbarte Strukturen übertragen.

Depolarisiert man unmittelbar nach dem Aktionspotential die Membran bis zur Schwelle des vorhergehenden Aktionspotentials und sogar darüber hinaus, so tritt keine Erregung auf. Dieser Zustand wird *absolute Refraktärphase* genannt und hat bei Nervenzellen eine Dauer von ca. 2 ms. Nach der absoluten Refraktärphase schließt sich die *relative Refraktärphase* an, in der durch große Depolarisationen Aktionspotentiale ausgelöst werden können, diese aber gegenüber

**Abbildung 4.2:** Zusammenhang zwischen Stromstärke und Pulsdauer bei der Erregung von Muskel- und Nervengewebe. Je kürzer die Pulsdauer, desto größer muss die Stromstärke sein, um ein Aktionspotential zu erzeugen. Es existiert eine minimale Stromstärke, bei der selbst bei einer unendlich langen Pulsdauer keine Erregung mehr erzeugt wird. Diese Stromstärke wird Rheobase genannt. Über die Rheobase wird die Chronaxie definiert. Die Chronaxie ist die Zeitdauer, die bei einem Strom mit der Stärke der doppelten Rheobase benötigt wird, um eine Erregung auszulösen und stellt eine gewebetypische Konstante dar.

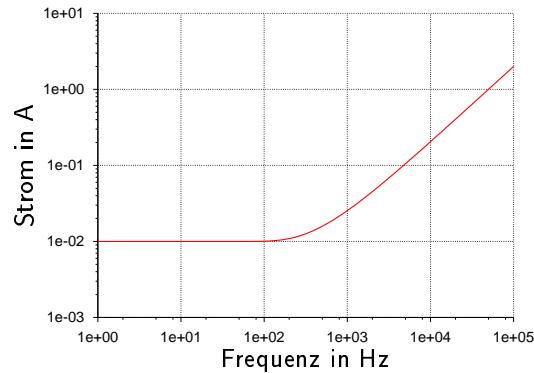


normalen Aktionspotentialen kleinere Amplituden haben. Die Refraktärphase wird durch eine zeitlich begrenzte Inaktivierung der Natriumionenkanäle unmittelbar nach der Depolarisation verursacht. Diese Inaktivierung wird durch die Repolarisierung wieder aufgehoben, was einige Millisekunden benötigt. Während dieser Zeit sind die Natriumionenkanäle nicht oder nur bedingt aktivierbar (SCHMIDT ET AL., 2000).

Die Tatsache, dass eine Erregung von Zellen nur im niederfrequenten Bereich zustande kommt beruht darauf, dass zu einer Öffnung der Natriumkanäle gewisse Strukturveränderungen in den Tunnelproteinen notwendig sind, die nicht beliebig schnell ablaufen können. Wenn also bei Frequenzen ab einigen Kilohertz die Halbwelle zu kurz wird, dann können nicht ausreichend Natriumionen bewegt werden, um ein Auslösen des Aktionspotentials zu erzeugen. Es entsteht folglich keine Erregung. Bei sehr niedrigen Frequenzen findet ebenfalls keine Erregung statt, da dann die Potentialänderung so langsam erzeugt wird, dass aktive Transportmechanismen wie z. B. die Natrium-Kalium-Pumpe den Effekt wieder ausgleichen können (GEDDES, 1995). Bei der in Deutschland üblichen Netzfrequenz von 50 Hz sind optimale Bedingungen für eine Stimulation gegeben, da die Dauer einer Halbwelle sehr gut für die Ausbildung eines Aktionspotentials geeignet ist. Daraus resultieren die besonderen Gefahren für die Gesundheit bei Kontakt mit stromführenden Netzteilen.

Die Erregbarkeit von Gewebe bei sehr niedrigen Frequenzen oder sogar Gleichstrom ist aber nicht nur von der Frequenz sondern auch von anderen Faktoren abhängig. Schon früh erkannten WEISS (1901) und LAPICQUE (1909) den Zusammenhang zwischen Pulsdauer und Stromstärke eines rechteckförmigen Pulses zur Erregung von Gewebe. Dabei wurden von LAPICQUE die Begriffe *Chronaxie* und *Rheobase* eingeführt. Der Begriff Rheobase bezeichnet hierbei einen Grenzstrom, der selbst bei einer unendlich langen Pulsdauer gerade nicht mehr zu einer Erregung führt. Die Chronaxie wird über die Rheobase definiert. Die Chronaxie ist die Zeitdauer, die bei einem Strom mit der Stärke der doppelten Rheobase benötigt wird, um eine Erregung auszulösen und stellt eine gewebetypische Konstante dar. Für den Zusammenhang zwischen benötigter Stromstärke und Pulsdauer  $t_p$ , um eine Stimulation zu erzeugen leitete BLAIR (1932) das Stimulationsgesetz ab, welches in Abhängigkeit der Rheobase  $b$  (A), der Membranzeitkonstante  $\tau$  (s) und der Pulsdauer  $t_p$  (s) die für eine Stimulation notwendige Stromstärke angibt:

**Abbildung 4.3:** Bei sinusförmigen Wechselstrom hängt die notwendige Stromstärke, eine Stimulation zu erzeugen, von der Frequenz des Stromes ab. An diesem Beispiel für menschliches Muskelgewebe erkennt man einen Anstieg der benötigten Stromstärke ab einer Frequenz von 100 Hz. Dabei wurde willkürlich angenommen, dass mindestens eine Stromstärke von 10 mA für eine Stimulation notwendig ist.



$$I(t_p) = \frac{b}{1 - e^{-t_p/\tau}} . \quad (4.1)$$

Die Membranzeitkonstante<sup>1</sup> und die Rheobase sind hierbei gewebespezifische Größen, die experimentell bestimmt werden müssen. Abbildung 4.2 zeigt eine Strom-Pulsdauer-Kurve, die mit Gleichung (4.1) berechnet wurde. Als Rheobase wurde  $b = 10 \text{ mA}$  und als Membranzeitkonstante  $\tau = 2 \text{ ms}$  angenommen als Beispiel für menschliches Muskelgewebe. Tabellen mit experimentellen Werten für Membranzeitkonstanten befinden sich in (GEDDES, 1995). Zusätzlich zur Rheobase ist im Schaubild auch die Chronaxie eingezeichnet, die ungefähr bei  $t = 1,4 \text{ ms}$  liegt.

Bei der Stimulation von Gewebe durch Wechselstrom kann ein Zusammenhang zwischen benötigter Stromstärke und Stimulationsfrequenz hergeleitet werden. Dabei wird in Gleichung (4.1) für die Pulsdauer  $t_p$  einfach die Periodendauer  $T = 1/f$  des sinusförmigen Wechselstroms eingesetzt und man erhält die Stimulationsstromstärke in Abhängigkeit der Frequenz:

$$I(f) = \frac{b}{1 - e^{-1/(\tau \cdot f)}} . \quad (4.2)$$

Aus Gleichung (4.2) ist ersichtlich, dass bei ansteigender Frequenz eine größere Stromstärke zur Erzeugung einer Stimulation notwendig ist, wie bereits weiter oben begründet wurde. Abbildung 4.3 zeigt den Zusammenhang zwischen Frequenz und Stromstärke bei menschlichem Muskelgewebe. Als Rheobase wurde wiederum ein Strom von  $b = 10 \text{ mA}$  und eine Membranzeitkonstante von  $\tau = 2 \text{ ms}$  angenommen.

Bei der Bewertung numerischer Ergebnisse kann aus dem berechneten elektrischen Feld mit Gleichung (3.3) die Stromdichte im Körpermodell berechnet werden. Daraus lässt sich dann abschätzen, ob die Grenzstromstärke überschritten wurde und eine Stimulation von Muskel- oder Nervengewebe erfolgt.

Eine unerwünschte gesundheitliche Wirkung bei der Stimulation von Muskel- und Nervengewebe, ist zum einen die Verletzungsgefahr, da bei einer Stimulation unwillkürliche und nicht steuerbare Bewegungen der Gliedmaßen ausgeführt werden und so z. B. gerade Stürze von Leitern bei Elektroarbeiten keine Seltenheit sind (GEDDES, 1995) (vgl. dazu auch die Arbeit von

<sup>1</sup>Die Membranzeitkonstante ist nicht mit der Chronaxie zu verwechseln. Die Chronaxie ist die Pulsdauer, die bei einer Stromstärke von doppelter Rheobase notwendig ist. Die Membranzeitkonstante ist die notwendige Pulsdauer bei einer Stromstärke von 1,59-facher Rheobase (GEDDES, 1995).

NYENHUIS ET AL. (1999)). Problematisch sind auch Stimulationen von Herzmuskelgewebe, wenn bei genügend großer Stromstärke auch herznahe Strukturen gereizt werden. Im schlimmsten Fall fließt ein Strom direkt durch den Herzmuskel, der die Erregungsbildung und koordinierte Kontraktion des Herzen unterbricht und zu einem Flimmern der Herzmuskulatur führt. Dies findet fast immer einen tödlichen Ausgang, wenn dem Betroffenen nicht schnell adäquat mit einem Defibrillator Hilfe geleistet wird.

Neben den Gefahren durch Stimulation von Muskel- und Nervengewebe gibt es auch zahlreiche erwünschte gesundheitliche Wirkungen, die zu Therapiezwecken in der medizinischen Praxis durch die Anwendungen von niederfrequenten Strömen entstehen, z. B. bei der Reizstromtherapie und der transkutanen Elektronervenstimulation (TENS). Weiterhin sind alle Schrittmacheranwendungen am Herzen oder Nervengewebe zur Stimulation oder Schmerztherapie, sowie der Defibrillation von flimmernden Herzen als lebensrettende Maßnahme in der Notfallmedizin zu nennen.

#### 4.2.3 Erwärmung durch hochfrequente elektromagnetische Strahlung

Die durch elektromagnetische Felder ausgelöste Schwingung von elektrischen Dipolen in biologischen Geweben erzeugt einen Energieverlust der mit steigender Feldfrequenz den dominierenden Effekt ergibt. Dieser Energieverlust führt zu einer Erwärmung von Körpergewebe. Aus der medizinischen Erfahrung ist bekannt, dass der menschliche Körper erhebliche Wärmezufuhren verkraften kann und mit Hilfe seines thermoregulatorischen Systems Erwärmungen z. B. durch Schwitzen entgegenwirken kann. Allerdings liegen die Thermorezeptoren in der Haut, so dass Wärme, die in der Tiefe entsteht, erst verzögert wahrgenommen wird. Dieser Umstand kann bei schlecht durchbluteten Organen wie dem Augapfel zu unerwünschten Effekten führen, da eine Übererwärmung von den körpereigenen Rezeptoren unter Umständen erst zu spät wahrgenommen wird.

Im Gegensatz dazu wird in der medizinischen Praxis die Erwärmung durch elektromagnetische Felder gezielt zur Therapie von muskulären Problemen und Schmerztherapie in Form von Diathermieanwendungen mit Mikrowellen oder zur Hyperthermiebehandlung von Tumoren im Körper verwendet. Hier werden Körperregionen gezielt erwärmt oder sogar regelrecht überhitzt, um eine selektive Zerstörung von Gewebe zu erreichen.

Für die Bewertung der Auswirkungen eines hochfrequenten elektromagnetischen Feldes auf den menschlichen Körper ist aber nicht nur die durch Absorption aufgenommene Gesamtwärmemenge entscheidend, sondern auch an welchen Stellen im Körper diese Wärmeenergie deponiert wurde. Bei der numerischen Betrachtung muss daher ausgehend von der elektromagnetischen Feldverteilung im Körpermödell die lokal deponierte Leistung berechnet werden.

Bei der Wechselwirkung eines zeitharmonischen sinusförmigen elektrischen Feldes mit biologischem Gewebe findet aufgrund der in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Mechanismen eine Energiedeposition im Gewebe durch Leistungsabsorption aus dem elektrischen Wechselfeld statt. Bei der folgenden Beschreibung werden zweckmäßigerweise die Feldgrößen und die daraus abgeleiteten Größen in komplexer Notation wiedergegeben, wie es bereits in Abschnitt 2.3 für zeitharmonische Probleme eingeführt wurde.

Die in einem infinitesimal kleinen Volumen  $\Delta V$  aufgenommene elektrische Leistung  $\underline{P}_E$  lässt sich dann nach JACKSON (1975) aus dem Skalarprodukt der komplexen Amplitude des elektrischen Feldes  $\underline{\vec{E}}$  mit der konjugiert-komplexen Amplitude der Gesamtstromdichte  $\underline{\vec{J}}_g^*$  berechnen:

$$\underline{P}_E = \frac{1}{2} \vec{J}_g^* \cdot \underline{\vec{E}} \cdot \Delta V . \quad (4.3)$$

Setzt man in diese Gleichung für die Gesamtstromdichte  $\vec{J}_g$  Gleichung (3.3) ein, so ergibt sich:

$$\underline{P}_E = \frac{1}{2} \underline{\sigma}^*(\omega) \vec{E}^* \cdot \underline{\vec{E}} \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \underline{\sigma}^*(\omega) |\underline{\vec{E}}|^2 \cdot \Delta V . \quad (4.4)$$

Die komplexe Leistung  $\underline{P}_E$  setzt sich aus der *Wirkleistung* und der *Blindleistung* zusammen (STÖCKER, 1998). Als erstere wird der Realteil von  $\underline{P}_E$  bezeichnet, als Blindleistung der Imaginärteil. Aus Gleichung (4.4) ist ersichtlich, dass die Größe der einzelnen Anteile der komplexen Leitfähigkeit  $\sigma(\omega)$  über die Aufteilung der Leistung in Wirk- und Blindanteil entscheidet. Setzt man für  $\underline{\sigma}^*(\omega)$  in Gleichung (4.4) die Definition aus Gleichung (3.6) komplex-konjugiert ein, so ergibt sich mit  $E_{\text{abs}} \equiv |\underline{\vec{E}}|$ :

$$\underline{P}_E = \frac{1}{2} (\sigma_s + \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r''(\omega) - j \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r'(\omega)) \cdot E_{\text{abs}}^2 \cdot \Delta V . \quad (4.5)$$

Damit ergibt sich für die Wirkleistung  $P_W$  mit Gleichung (3.4) und  $\sigma_{\text{eff}}(\omega) = \sigma'(\omega)$ :

$$P_W = \Re \{ \underline{P}_E \} = \frac{1}{2} (\sigma_s + \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r''(\omega)) \cdot E_{\text{abs}}^2 \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \sigma_{\text{eff}}(\omega) \cdot E_{\text{abs}}^2 \cdot \Delta V . \quad (4.6)$$

Der Term  $\frac{1}{2} \sigma_{\text{eff}}(\omega) \cdot E_{\text{abs}}^2$  in Gleichung (4.6) gibt die absorbierte Leistungsdichte im Gewebe an und ist identisch mit dem Eingabeparameter  $q_{\text{HF}}$  in Gleichung (2.56) für den thermodynamischen Lösealgorithmus, wie in Abschnitt 2.6 beschrieben wurde.

Für eine erste Bewertung der Auswirkungen der Leistungsabsorption aus einem elektrischen Wechselfeld kann aber schon Gleichung (4.6) herangezogen werden, ohne einen weiteren numerischen Lösungsschritt durchzuführen. Dazu wird die *spezifische Absorptionsrate* als neue Größe eingeführt, die die absorbierte Leistung pro Kilogramm Objektgewicht angibt (DURNEY & CHRISTENSEN, 2000):

$$SAR = \sigma_{\text{eff}}(\omega) \frac{E_{\text{abs}}^2}{2\rho} . \quad (4.7)$$

Die spezifische Absorptionsrate ist ein Maß für die Belastung von Organismen durch elektromagnetische Wellen und eine fundamentale Größe bei der Angabe von Grenzwerten. Mit Hilfe dieser Größe lässt sich auch eine einfache Abschätzung für die Erwärmung von Gewebe angeben, wenn man jegliche Energiedissipation durch Wärmetransportmechanismen vernachlässigt. Dazu ist der Wert für die spezifische Absorptionsrate mit der Wechselwirkungszeit  $t_{\text{ww}}$  zwischen Gewebe und elektromagnetischem Wechselfeld zu multiplizieren und durch die spezifische Wärmekapazität  $c_s$  zu dividieren. Die absolute Temperaturerhöhung ergibt sich dann zu:

$$\Delta T = \frac{SAR \cdot t_{\text{ww}}}{c_s} = \frac{\sigma_{\text{eff}}(\omega) \cdot E_{\text{abs}}^2 \cdot t_{\text{ww}}}{2\rho c_s} . \quad (4.8)$$

Dieser Weg empfiehlt sich aber nur für einfache Abschätzungen, wenn z. B. aus Zeitgründen auf eine weitere numerische Analyse mit dem thermodynamischen Löser verzichtet werden muss,

da die berechnete Temperaturerhöhung linear mit der Wechselwirkungszeit  $t_{ww}$  ansteigt und damit über alle Grenzen steigen kann, was nicht der Realität entspricht. Die abgeleiteten Temperaturerhöhungen ergeben daher in der Regel eine deutliche Überschätzung der Gegebenheiten, insbesondere bei Annahme großer Wechselwirkungszeiten  $t_{ww}$  und sind daher nur begrenzt verwendbar, z. B. wenn es um Schlimmsten-Fall-Abschätzungen geht. Wenn genauere Aussagen gemacht werden sollen, dann kann auf eine Kopplung der numerischen Prozesse, wie in Abschnitt 2.6 beschrieben, nicht verzichtet werden.

#### 4.2.4 Weitere athermische Effekte

Der Begriff athermische Effekte ist eigentlich aus dem hochfrequenten Bereich abgeleitet und soll berücksichtigen, dass neben Erwärmungseffekten auch noch andere Erscheinungen auftreten können. Weiter gefasst versteht man darunter aber alle nicht-thermischen Effekte, also auch die bereits beschriebene Stimulation von Muskel- und Nervengewebe. Daneben werden auch noch zahlreiche andere Wirkungen beobachtet, die hier kurz wiedergegeben werden sollen.

Ein besonders wichtiger Aspekt in Bezug auf die Patientensicherheit ist die Wirkung elektromagnetischer Felder auf Implantate. Hier steht neben möglichen Erwärmungseffekten des Implantats immer die Funktionssicherheit im Vordergrund. Besonders kritisch sind Funktionsstörungen von Herzschrittmachern zu betrachten, die je nach Störungsart zu lebensbedrohlichen Zuständen für den Patienten führen können. Bei einer Betrachtung dieser Problematik muss unter anderem die Schrittmacherart, die Positionierung im Körper und die therapierte Herzrhythmusstörung berücksichtigt werden. Einen Überblick über die Problematik mit zahlreichen weiteren Literaturhinweisen findet sich bei SMITH UND AASEN (1992), sowie bei BOSSERT (1999).

Weiterhin wird im Rahmen von psychosomatischen Effekten eine Elektrosensibilität von Personen diskutiert. Dies stellt die Beeinträchtigung der Gesundheit durch nieder- und hochfrequente Felder jeglicher Art dar, oft ausgelöst durch das Vorhandensein von Hochspannungsfreileitungen oder Mobilfunkbasisstationen in Sichtweite der Betroffenen, die über Schlafstörungen, Essstörungen, Kopfschmerzen und Migräne oder andere gesundheitliche Beschwerden klagen und diese mit den elektromagnetischen Feldern in Verbindung bringen. Bereits vor über zwanzig Jahren wurde von KÜHNE (1980) die Elektrosensibilität von Menschen in einem großangelegten Experiment untersucht. Dabei stellte sich schon damals heraus, dass die Elektrosensibilität von Menschen in den meisten Fällen auf psychologische Probleme zurückzuführen ist und in erster Linie keine besondere „Wahrnehmungsgabe,“ für elektromagnetische Felder darstellt.

Eine vieldiskutierte Hypothese ist auch der Einfluß auf den Melatoninstoffwechsel durch elektromagnetische Felder. Melatonin ist ein Hormon, was den Schlaf-Wach-Rhythmus des Menschen beeinflusst. Es wird auch mit der Entstehung von Krebs in Verbindung gebracht (REISSENWEBER ET AL., 1996). Gerade Krankheiten ohne bisherige klare Genese, wie z. B. Hirntumore, werden oft in Verbindung mit den Auswirkungen schwacher elektromagnetischer Felder gebracht. Bislang konnte aber kein Kausalzusammenhang zwischen der Entstehung von Krebs und elektromagnetischen Wechselfeldern reproduzierbar nachgewiesen werden, auch wenn immer wieder Studien auftauchen, die eben diesen Kausalzusammenhang gefunden haben wollen. Mit dieser speziellen Problematik der Entstehung von Krebs durch 50-Hz-Felder setzt sich die Arbeit von IRNICH (1996) auseinander.

Auf eine weitere Diskussion psychosomatischer und hormoneller Effekte wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet, da sie zum einen immer noch umstritten sind und sich zum anderen mit den hier verwendeten numerischen Methoden nicht erfassen und beurteilen lassen.

## 4.3 Grenzwerte

### 4.3.1 Grundlagen der Grenzwertfindung

Grenzwerte dienen dem Schutz der Bevölkerung vor den unerwünschten gesundheitlichen Wirkungen elektromagnetischer Strahlung. Der Ableitung von Grenzwerten kommt daher eine große Bedeutung zu. Bei der Festlegung von Grenzwerten müssen daher in erster Linie reproduzierbare biologische und gesundheitliche Wirkungen berücksichtigt werden. Dabei muss aber berücksichtigt werden, dass Grenzwerte immer auch statistischer Natur sind, d. h. das Auftreten eines Effekts kann zwar mit großer Sicherheit aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden. Sicherheit wird dadurch als Akzeptanz eines kleinen Restrisikos verstanden. Im Gegensatz zu ionisierender Strahlung werden bei der elektromagnetischen Wechselwirkung mit dem menschlichen Körper *Schwellenwirkungen* betrachtet, da zum Auslösen einer Wirkung z. B. eine Reizschwelle überschritten werden muss. Bei ionisierender Strahlung kann schon das Auftreffen eines einzelnen Energiequants zu einer Schädigung der DNA führen. Im Gegensatz dazu ist die Wärmeentstehung durch hochfrequente elektromagnetische Felder so lange ungefährlich, wie sie durch thermoregulatorische Mechanismen des menschlichen Körpers ausgeglichen werden kann. Aus diesem Grund ist für die Erwärmung von Gewebe durch hochfrequente elektromagnetische Felder die Angabe eines Grenzwertes adäquat.

Als Beispiel hierfür sei eine Untersuchungen zur Festlegung der Reizschwelle für eine Muskelstimulation geschildert (GEDDES, 1995). In einem Stimulationsexperiment wird z. B. festgestellt, dass bei einer Stimulation mit Wechselspannung im niederfrequenten Bereich zwischen 10 Hz und 1 kHz ab einer Stromdichte von  $100 \text{ mA/m}^2$  bei den Probanden Stimulationseffekte der Muskulatur der Extremitäten auftreten. Untersucht man nun eine große Anzahl von Probanden, so ergibt sich eine Normalverteilung der gemessenen Stimulationsschwellen, die um einen Mittelwert streuen. Um sicher zu gehen wird man z. B. als Grenzwert zunächst die kleinste ermittelte Stromdichte von  $100 \text{ mA/m}^2$  verwenden. Der Grenzwert muss daher mindestens so gewählt werden, dass eine Person unter normalen Umständen in kein elektromagnetisches Feld gelangen darf, welches eine Stromdichte in dieser Größe im Körper induziert.

Da die Anzahl der Probanden nur eine Stichprobe aus der Gesamtbevölkerung umfasst ist es aber nicht ausgeschlossen, dass es Personen gibt, deren Reizschwelle noch unterhalb der im Experiment ermittelten kleinsten Schwelle liegt. Je besser und größer die Personengruppe im Experiment gewählt wird, desto zuverlässiger sind die Aussagen bezüglich des Grenzwertes und desto kleiner ist das Risiko bei Einhalten des Grenzwertes bei einer anderen Person doch eine unerwünschte Stimulation zu erzeugen. Dennoch kann ein Restrisiko nicht ausgeschlossen werden. Um dieses zu minimieren, werden anhand der ermittelten Schwellenwerte Sicherheitsabstände eingeführt. Üblicherweise wird der so ermittelte Grenzwert noch durch die Zahl 10 als Sicherheitsfaktor dividiert. So erhält man für die maximal zulässige Stromdichte einen Grenzwert von  $10 \text{ mA/m}^2$  für die zeitweise Exposition von arbeitenden Personen. Für die Allgemeinbevölkerung wird zusätzlich ein weiterer Sicherheitsfaktor von fünf, also insgesamt der Faktor 50, berücksichtigt, was eine maximal zulässige Stromdichte von  $2 \text{ mA/m}^2$  ergibt (ICNIRP, 1998).

Der hier beschriebene experimentelle Vorgang ist nur eine Möglichkeit der Grenzwertfindung. Daneben existieren noch die epidemiologischen Studien bei denen Menschen aufgrund ihrer Lebensgeschichte oder Arbeitsbedingungen in Gruppen eingeteilt werden und versucht wird Effekte der Feldexposition bei den einzelnen Gruppen nachzuweisen und gegen andere Gruppen abzugrenzen. Epidemiologische Studien beziehen sich unter anderem oft auf die Gefährdung am

Arbeitsplatz bestimmter Berufsgruppen durch elektromagnetische Strahlung, Krebsrisiken bei Bevölkerungsgruppen in der Nähe elektrischer Anlagen oder Gesundheitsrisiken für schwangere Frauen. Oftmals werden in epidemiologischen Studien aus beobachteten zufälligen Korrelationen scheinbare Kausalzusammenhänge abgeleitet, ohne andere relevante belastende Faktoren mit in die Studie miteinzubeziehen. Dabei ist eine Abgrenzung der beobachteten Effekte gegenüber anderen Ursachen sehr schwer. Dies dient auch oft als Hauptkritikpunkt bei der Beurteilung der Aussagekraft einzelner Studien.

Andere Methoden, Grenzwerte abzuleiten, beinhalten wie bereits geschildert Studien an freiwilligen Testpersonen aber auch an Tieren oder Zellkulturen. Daneben ergeben auch numerische Experimente weitere Hinweise zur Ableitung und Festlegung von Grenzwerten.

Die Festlegung von Grenzwerten ist ein dynamischer Prozess, da die aktuell gültigen Grenzwerte immer an die neuesten wissenschaftlichen Erkenntnisse angepasst werden müssen. Im Jahr 1998 veröffentlichte die Internationale Kommission zum Schutz vor nicht-ionisierender Strahlung (IC-NIRP) umfassende Richtlinien, die als Grundlage für die aktuell gültigen Grenzwerte dienen. In dieser Studie sind in einem umfassenden Literaturteil alle relevanten Arbeiten zur Problematik beschrieben und bewertet. Ausgehend von den Ergebnissen dieser Autoren wurden Grenzwerte in einem Frequenzbereich von 0 Hz bis 300 GHz definiert. Dabei wurden allerdings nur anerkannte biologische und gesundheitliche Wirkungen berücksichtigt, wie z. B. die Stimulation von Muskel- und Nervengewebe und die Erwärmung von Gewebe durch Energieabsorption. Mögliche Langzeiteffekte wie z. B. ein erhöhtes Krebsrisiko, wurden bei der Festlegung der Grenzwerte außer acht gelassen, da nach Meinung der ICNIRP zu wenig gesicherte Erkenntnisse zu diesen möglichen Wirkungen vorliegen.

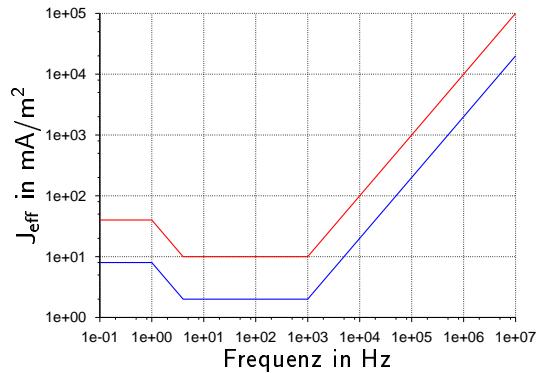
In dieser Studie wird zwischen *Basisgrenzwerten* und *Referenzwerten* unterschieden. Die Basisgrenzwerte geben Grenzwerte für die zulässige Stromdichte  $J$  sowie die spezifische Absorptionsrate  $SAR$  an, da diese beiden Größen direkt für die biologischen Wirkungen verantwortlich sind, wie in den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3 bereits begründet wurde. Die Referenzwerte stellen aus diesen Basisgrenzwerten abgeleitete Werte für die elementaren physikalischen Größen elektrisches Feld  $E$  und magnetische Flussdichte  $B$  dar, die primär nicht für eine Beurteilung der physiologischen Auswirkungen geeignet sind.

Die Angabe von Referenzwerten bringt aber auch einige Schwierigkeiten mit sich, da elektromagnetische Felder in unterschiedlichen Personen aufgrund der Streuung in den physiologischen Parametern verschiedene Stromdichten und Leistungsabsorbtionen ergeben. Ein Überschreiten der Referenzwerte bei der Exposition von Personen ist somit prinzipiell möglich. Dies ist aber nur dann zulässig, wenn sichergestellt werden kann, dass die Basisgrenzwerte trotz allem nicht überschritten werden.

Bei der Angabe von Grenzwerten wird in der Regel zwischen beruflich exponierten Personen, die nur zeitweise einer erhöhten Feldstärke, und der Allgemeinbevölkerung, die ständig einem Feld ausgesetzt sein kann, unterschieden. Bei arbeitenden Personen wird davon ausgegangen, dass diese sich der Exposition bewusst sind und auch entsprechende Vorsichtsmaßnahmen aufgrund ihrer speziellen Ausbildung einhalten. Bei der Allgemeinbevölkerung muss davon ausgegangen werden, dass diese Personen sich unbeabsichtigt, unbewusst und dauerhaft in einem elektromagnetischen Feld aufhalten und eventuell sogar gesundheitlich eingeschränkt sein können, was die Empfindlichkeit gegenüber gesundheitlichen Wirkungen noch erhöhen kann.

Diesen Umständen ist daher durch einen größeren Sicherheitsfaktor für die Allgemeinbevölkerung Rechnung zu tragen. Die ICNIRP schlägt neben dem Sicherheitsfaktor von 10 für die

**Abbildung 4.4:** Basisgrenzwerte für den maximal zulässigen Effektivwert der Stromdichte im menschlichen Körper für beruflich exponierte Personen (rote Kurve) und die Allgemeinbevölkerung (blaue Kurve) nach den Richtlinien der IC-NIRP (1998) im Frequenzbereich von 0,1 Hz bis 10 MHz.



arbeitende Bevölkerung einen zusätzliche Faktor von 5 für die Allgemeinbevölkerung bei der Festlegung von Grenzwerten vor. In den nächsten beiden Abschnitten werden für die Stromdichte, die spezifische Absorptionsrate sowie den daraus abgeleiteten Größen elektrisches Feld und magnetische Flussdichte die gängigen Grenzwerte für beruflich exponierte Personen, sowie für die Allgemeinbevölkerung angegeben.

#### 4.3.2 Grundlegende Basisgrenzwerte

Abbildung 4.4 gibt die maximal zulässigen Werte für die Stromdichte im menschlichen Körper an. Ausgehend von beobachteten Stimulationseffekten wurden die experimentell bestimmten Stromdichten durch einen Sicherheitsfaktor von 10 dividiert und so die Stromdichtegrenzwerte für beruflich exponierte Personen bestimmt, wie bereits in Abschnitt 4.3.1 beschrieben. Werden diese Grenzwerte eingehalten, so ist eine Stimulation von Muskel- und Nervengewebe im beruflichen Umfeld so gut wie ausgeschlossen. Für die Allgemeinbevölkerung wurde noch ein zusätzlicher Sicherheitsfaktor von 5 berücksichtigt, durch die die Grenzwerte für beruflich exponierte Personen dividiert wurden um so die Grenzwerte für die Allgemeinbevölkerung zu erhalten.

In Abschnitt 4.2.2 wurden die grundlegenden Mechanismen für eine Stimulation von Muskel- und Nervengewebe erläutert. Die Grenzwerte tragen den physiologischen Vorgängen Rechnung, da im Bereich von einigen Hertz bis Kilohertz die zulässigen Stromdichtewerte am niedrigsten sind. Ab einer Stimulationsfrequenz von 10 MHz werden keine Grenzwerte mehr angegeben, da ab dieser Frequenz keine Stimulationseffekte mehr zu erwarten sind.

Für elektromagnetische Felder mit höheren Frequenzen bis zu 10 GHz werden Grenzwerte für die spezifische Absorptionsrate *SAR* angegeben (vgl. Abschnitt 4.2.3). Für die *SAR* werden ab 100 kHz Grenzwerte angegeben. Damit wird der Tatsache Rechnung getragen, dass es im Frequenzbereich von 100 kHz bis 10 MHz zu Stimulationseffekten und Erwärmungen kommen kann. In diesem Frequenzbereich müssen daher die Grenzwerte für die Stromdichte und die spezifische Absorptionsrate eingehalten werden.

Die angegebenen maximal zulässigen Werte für die *SAR* orientieren sich an einer durchschnittlichen Ganzkörperbelastung mit 4 W/kg über einen Zeitraum von 30 min. Dabei wärmt sich ein menschlicher Körper um ca. 1°C auf, was eine gerade noch tolerierbare Belastung für den menschlichen Organismus darstellt. Bei der Ableitung von einem Basisgrenzwert wird daher von einer durchschnittlichen Belastung von 4 W/kg ausgegangen und dieser Wert für beruflich exponierte Personen zuerst durch 10 dividiert, um so eine durchschnittliche Ganzkörperbelastung

von 0,4 W/kg zu erhalten. Eine zusätzliche Division durch 5 ergibt für die Allgemeinbevölkerung einen Grenzwert von 0,08 W/kg. Die angegebenen Werte für die *SAR* stellen Durchschnittswerte dar und müssen nach den Vorschriften der ICNIRP über einen Zeitraum von 6 min gemittelt werden.

Um das Auftreten von großen lokalen Energiedepositionen im Körper zu vermeiden gelten neben den Ganzkörpergrenzwerten für die *SAR* auch „lokale“ Grenzwerte für den Kopf und den Rumpf, sowie die Extremitäten. Dabei ist in einem Zeitraum von 6 min über ein zusammenhängendes Stück Gewebe mit jeweils einer Masse von 10 g die gemittelte *SAR* zu bestimmen. Dies ist über den gesamten Körperteil durchzuführen. So sind die Werte für die lokale spezifische Absorptionsrate zu ermitteln. Keiner dieser Werte darf im Kopf oder Rumpf bei beruflich exponierten Personen über 10 W/kg und bei der Allgemeinbevölkerung über 2 W/kg liegen. Bei den Extremitäten liegen diese Werte bei 20 W/kg für beruflich exponierte Personen und bei 4 W/kg bei der Allgemeinbevölkerung.

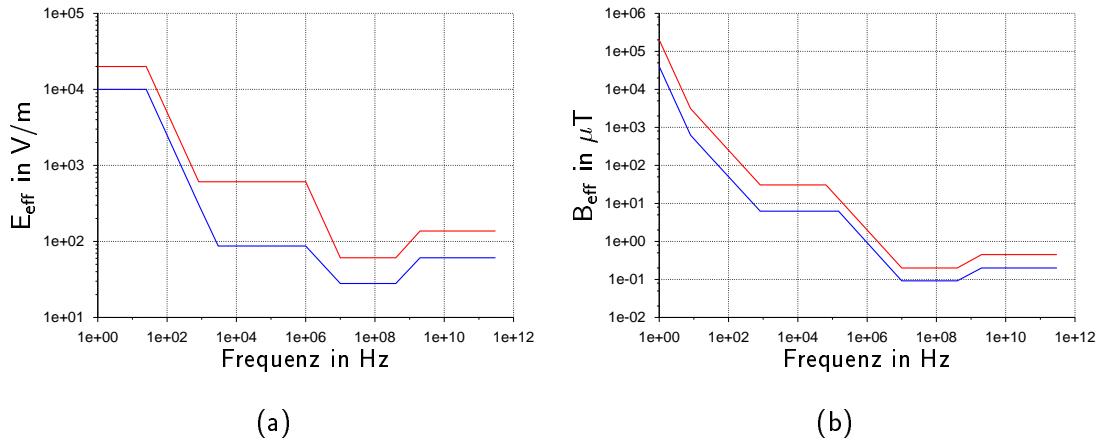
Andere Darstellungen geben neben der *SAR* die tolerierbare Temperaturerhöhung als Maß für die Auswirkung eines elektromagnetischen Feldes an. In diesen Richtlinien wird eine Dauererwärmung des Körpers um maximal 1°C pro Stunde Expositionsdauer bei einer mittleren Leistungsabsorption von 1 W/kg als thermoregulatorisch tolerabel angenommen. Neben der *SAR* wird die absolut erzielte Temperaturerhöhung im Gewebe als Grenzwert angegeben, was für einen Vergleich mit den Ergebnissen des thermodynamischen Algorithmus geeigneter ist. Dabei werden z. B. bei der MR-Tomographie Temperaturerhöhungen im Bereich des Kopfes von 1°C absolut bei gesunden Personen als tolerabel angesehen (IRPA, 1991). Der Wert muss bei kreislaufschwachen Personen, Kindern und Schwangeren auf 0,5°C absolut reduziert werden. Für andere Körperteile, z. B. die Extremitäten können auch höhere Erwärmungen akzeptiert werden, solange die Körpertemperatur nicht generell über 1°C ansteigt und so das thermoregulatorische System überlastet. Für die angegebenen Temperaturgrenzwerte existieren auch die Sicherheitsfaktoren von 10 für die arbeitende Bevölkerung und von 5 für die Allgemeinbevölkerung. Dies ergibt unter Annahme einer maximal zulässigen Erwärmung von z. B. 1°C zulässige Werte von 0,1°C und 0,02°C (ICNIRP, 1998).

Generell gilt, dass die Ganzkörpergrenzwerte, die Grenzwerte für die lokale Leistungsabsorption und eventuell in Abhängigkeit von der betrachteten Frequenz die Grenzwerte für die Stromdichte gleichzeitig eingehalten werden müssen. Bei gepulsten Vorgängen muss eine äquivalente Frequenz berechnet werden nach  $f = 1/(2 \cdot t_{\text{puls}})$  und die Grenzwerte gemäß dieser Frequenz angewendet werden (ICNIRP, 1998).

#### 4.3.3 Abgeleitete Referenzwerte

Aus den Basisgrenzwerten, die direkt mit biologischen und gesundheitlichen Wirkungen im menschlichen Körper gekoppelt sind, lassen sich für weitere physikalische Größen Grenzwerte ableiten, die Referenzwerte genannt werden. Abbildung 4.5 gibt die maximal zulässigen effektiven Feldstärkewerte für das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte im Frequenzbereich von 1 Hz bis 300 GHz an. Dabei sind wiederum höhere Grenzwerte für beruflich exponierte Personen zulässig.

Die aus den Basisgrößen abgeleiteten Referenzwerte dienen als Richtschnur für die zulässigen Feldstärken. Ein Überschreiten der Referenzwerte ist zulässig, solange sichergestellt wird, dass die Referenzwerte auf jeden Fall eingehalten werden. Dazu werden in den Richtlinien der ICNIRP



**Abbildung 4.5:** Referenzwerte für die maximal zulässige Stärke des elektrischen Feldes und der magnetischen Flussdichte für beruflich exponierte Personen (rote Kurve) und die Allgemeinbevölkerung (blaue Kurve) nach den Richtlinien der ICNIRP (1998) im Frequenzbereich von 1 Hz bis 300 GHz. Diese Referenzwerte leiten sich aus den Basisgrenzwerten für die Stromdichte und die spezifische Absorptionsrate ab.

(1998) weitere Angaben gemacht und zusätzlich für das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte zulässige Spitzenwerte angegeben, die bei Einhaltung der Referenzwerte kurzzeitig möglich sind. Darüber hinaus werden Grenzwerte für weitere physikalische Größen, z. B. der Energiedichte bei Frequenzen über 10 GHz, sowie Erläuterungen und Begründungen über die Wahl und Festlegung der Grenzwerte und eine umfassende Literaturzusammenstellung angegeben.

Für die medizinische und physiologische Bewertung der Auswirkung elektromagnetischer Strahlung sind diese Referenzwerte allerdings von untergeordneter Bedeutung. Bei der Auswertung numerischer Modelle wird daher aus den berechneten elektrischen Feldern immer die *SAR* nach Gleichung (4.7) oder die Stromdichte nach Gleichung (3.3) bestimmt, um dann die möglichen Wirkungen abzuschätzen. Weiterhin interessiert auch die absolute Temperaturerhöhung durch die Leistungsabsorption aus dem elektromagnetischen Feld, die mit Hilfe von Gleichung (4.8) grob abgeschätzt oder mit Hilfe eines thermodynamischen Lösealgorithmen in einem weiteren numerischen Schritt berechnet werden kann.

## 4.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Wirkungen elektromagnetischer Felder auf biologisches Gewebe im allgemeinen und den menschlichen Körper im speziellen vorgestellt. Dabei wurden nur die wissenschaftlich abgesicherten Effekte der Stimulation von Muskel- und Nervengewebe sowie die Erwärmung von Gewebe durch die Absorption von Leistung aus dem elektromagnetischen Feld diskutiert. Andere Effekte wurden nicht näher betrachtet, da sie nicht mit den numerischen Methoden, die in dieser Arbeit verwendet werden, erfasst und bewertet werden können.

Es wurde gezeigt, wie die elementaren numerischen Ergebnisse weiterverarbeitet werden müssen, damit eine Bewertung hinsichtlich der physiologischen Auswirkung eines elektromagnetischen Feldes möglich ist. Im einzelnen sind das die Berechnung der induzierten Ströme und der absorbierten Energiemenge aus dem elektromagnetischen Feld, die aus der Lösung des elektrodynamischen Feldproblems, welches als komplexe elektrische Feldverteilung vorliegt, berechnet werden müssen.

Zur abschließenden Bewertung der berechneten physiologisch relevanten Größen Stromdichte und Leistungsabsorption ist ein Vergleich mit den gültigen Grenzwerten notwendig. Dazu wurde ein Einführung in die generelle Ableitung von Grenzwerten gegeben und die gängigen Grenzwerte und ihre Anwendung zur Beurteilung von numerischen Simulationsergebnissen vorgestellt, sowie auf die besonderen Unterschiede zwischen Basisgrenzwerten und Referenzwerten hingewiesen.



## **Teil II**

### **MODELLE UND ERGEBNISSE**



---

# Kapitel 5

---

## Numerische Voruntersuchungen

---

### 5.1 Einführung

Durch die Vielzahl der einstellbaren Parameter der Lösealgorithmen in den einzelnen Modulen von MAFIA ist es notwendig, die optimale Parametereinstellung in numerischen Voruntersuchungen zu ermitteln, um für alle simulierten Szenarien die gleichen optimalen Bedingungen zu gewährleisten. Diese Voruntersuchungen werden zweckmäßigerweise an einfachen Modellen durchgeführt, da eine Vielzahl an Simulationsläufen notwendig ist, um verschiedene Parameterkombinationen zu testen.

Im folgenden Unterkapitel wird zunächst auf die Konvergenzeigenschaften der Lösealgorithmen des Frequenzbereichslösers **W3** eingegangen. Dabei werden anhand eines Testbeispiels die optimalen Parametereinstellungen für die Lösealgorithmen ermittelt.

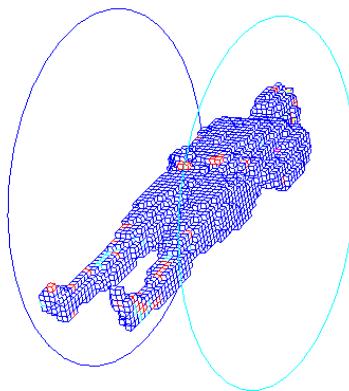
Danach folgt eine Gegenüberstellung von expliziter und impliziter Zeitintegration des thermodynamischen Moduls **H3** und zur Validierung der Rechengenaugkeit ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit einer analytischen Referenzlösung. Schließlich wird in einem eigenen Unterkapitel die Möglichkeit, mit der adaptiven Zeitschrittsteuerung Rechenzeit einzusparen, genauer untersucht.

### 5.2 Konvergenzverhalten der Frequenzbereichslöser

In diesem Unterkapitel werden die Parameter vorgestellt, die einen entscheidenden Einfluss auf das Konvergenzverhalten der Frequenzbereichslöser hat. Einige Parameter sind durch die Art des Problems bereits festgelegt, andere können frei gewählt werden. Insbesondere die freie Wahl von Parametern bereitet einige Schwierigkeiten, da bisher keine Erfahrungswerte für eine optimale Konfiguration vorliegen. Aus diesem Grund müssen die Auswirkungen auf die Konvergenzgeschwindigkeit, die sich durch die Wahl der freien Parameter ergeben, in einer eigenen numerischen Studie untersucht werden.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst die Auswahl der Systemgleichung und der Lösealgorithmen aus der Menge der zur Verfügung stehenden Gleichungen und Algorithmen anhand der

**Abbildung 5.1:** Einfaches Körpermodell für die Analyse des Konvergenzverhaltens der einzelnen Lösealgorithmen des Frequenzbereichslösers W3. Das Modell besteht aus über 500 000 Knotenpunkten. Die Feldanregung wird mit einem Helmholtzspulenpaar realisiert in Anlehnung an die numerischen Modelle zur Simulation des Hochfrequenzfeldes bei der Magnetresonanztomographie.



modellbedingten Vorgaben begründet. Daran schliesst sich eine nähere Betrachtung der Vorkonditionierungsmöglichkeiten der Systemmatrix an, gefolgt von einer Diskussion der Problematik durch Reflexionen am Rand des Rechenvolumens, welche sich durch die Annahme offener Randbedingungen ergeben, sowie einiger Möglichkeiten, diese zu minimieren. Zwei weitere Parameter, die die Konvergenzgeschwindigkeit beeinflussen, sind die interne Genauigkeit der Gleikommazahlendarstellung und die lokale Verfeinerung der räumlichen Diskretisierung durch Variation der Gitterschrittweite. Sie werden in einem eigenen Unterabschnitt diskutiert.

Bei der Durchführung numerischer Testsimulationen müssen auch die Möglichkeiten zur Kontrolle der numerischen Lösungen genauer betrachtet werden. Dabei werden verschiedene Kontrollfunktionen vorgestellt und auf ihre Zuverlässigkeit hin bewertet. Danach folgt eine Betrachtung von Rechenzeit und Speicherbedarf für die verschiedenen Algorithmen. Diese beiden Parameter beeinflussen zwar nicht die Konvergenzgeschwindigkeit, sind aber vor der numerischen Simulation wichtig, um den Aufwand und die Dauer einer Modellrechnung abzuschätzen.

Aus den diskutierten Parametern wurden insgesamt 24 Kombinationen zusammengestellt, die in numerischen Testläufen miteinander verglichen wurden. Die Ergebnisse dieser Testläufe führen dann zu einer Aussage über die optimale Parameterwahl zur Lösung numerischer Probleme mit verlustbehafteten Modellen des menschlichen Körpers. Diese schließen mit einer expliziten Angabe der Parameter dieses Unterkapitel ab.

Als Testmodell dient ein inhomogenes Modell des menschlichen Körpers in einem einfachen Helmholtzspulensystem, welches in Anlehnung an die in Kapitel 6 verwendeten Modelle erstellt wurde. Abbildung 5.1 zeigt eine dreidimensionale Darstellung des Modells. Das diskrete Gitternetz besteht aus 531 441 Knoten und verfügt über eine äquidistante Gitterschrittweite von 25 mm. Die dielektrischen Parameter der verwendeten Körnergewebe wurden der Anregungsfrequenz entsprechend ausgewählt. Die Feldanregung wird mit dem Helmholtzspulenpaar realisiert, durch das ein beliebiger Stromfluss definiert werden kann. Die Simulationen wurden für maximal 5 000 Iterationsschritte durchgeführt oder vorher abgebrochen, wenn ein Residuum von kleiner  $10^{-4}$  erreicht wurde. An den Rändern des Rechenvolumens wurden offene Randbedingungen angenähert.

### 5.2.1 Auswahl der Systemgleichung und des Lösealgorithmus

Im Modul **W3** des Frequenzbereichslösers stehen in der Programmversion 4.106 insgesamt acht verschiedene Lösealgorithmen zur Verfügung. Die Auswahl eines Lösealgorithmen ist von der Problemstellung abhängig. Für die acht Algorithmen stehen drei verschiedene Gleichungen zur Verfügung, mit denen das Feldproblem gelöst werden kann. Zum einen ist das die diskrete Curl-Curl-Eigenwertgleichung (2.30), sowie zwei Formen der davon abgeleiteten Helmholtz-Eigenwertgleichung. Weitere Möglichkeiten ergeben sich durch die Auswahl einer Äquilibrierungsstrategie der Systemmatrix, bei der eine Verbesserung der Konditionszahl  $\chi(\mathbf{A})$  angestrebt wird, was die Konvergenzgeschwindigkeit des numerischen Verfahrens deutlich beschleunigen kann (HACKBUSCH, 1990).

Ziel jeder numerischen Voruntersuchungen muss es sein, aus der Vielfalt der möglichen Kombinationen aus Algorithmus, Gleichung und Vorkonditionierung der Systemmatrix durch Vorkonditionierungsstrategien diejenigen auszuwählen, die am besten für die Lösung der gestellten Probleme geeignet sind. Aufgrund der grundlegenden Eigenschaften einiger Algorithmen und Gleichungen erweist sich eine Vielzahl an Kombinationen a priori als ungeeignet. Diese bedürfen daher keiner eingehenden Betrachtung, was z. B. bei den hier betrachteten verlustbehafteten Modellen mit endlicher Leitfähigkeit und offenen Randbedingungen der Fall ist.

Eine Einschränkung ergibt sich für die in Frage kommende Eigenwertgleichung. Wie in Abschnitt 2.3 begründet, eignet sich nur die diskrete Curl-Curl-Eigenwertgleichung (2.30) für die Lösung der numerischen Probleme in dieser Arbeit. Die beiden Helmholtz-Gleichungen scheiden aus, da sie auf der einen Seite einen deutlich größeren Speicherplatz benötigen und auf der anderen Seite bei der Anwendung auf Probleme mit endlicher Leitfähigkeit bezüglich ihrer Konvergenzeigenschaften keinen Vorteil gegenüber der Curl-Curl-Eigenwertgleichung besitzen. Bei den folgenden numerischen Voruntersuchungen wird daher nur die diskrete Curl-Curl-Eigenwertgleichung näher betrachtet.

Aus der Vielzahl der Lösealgorithmen wurden drei Algorithmen ausgewählt. Dies sind das **COCGSSOR**-, das **PSBCGR**- und das **PQMR**-Verfahren (vgl. auch mit Abschnitt 2.3.4). Die anderen verfügbaren Algorithmen scheiden aus, da sie nur für verlustfreie Probleme geeignet sind oder keine Näherung für offene Randbedingungen besitzen (MAFIA, 2000B). Ein weiterer Vorteil dieser Verfahren ist, dass sie bereits über integrierte Vorkonditionierungsstrategien der Systemmatrix verfügen, die im nächsten Abschnitt ausführlicher vorgestellt werden.

### 5.2.2 Möglichkeiten der Vorkonditionierung

Eine Vorkonditionierung oder Äquilibrierung der Systemmatrix kann eine Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit des Gleichungssystems erzeugen, wenn durch diese Maßnahme die Konditionszahl der Systemmatrix verringert wird (siehe z. B. bei HAHNE). Es ist aber durchaus möglich durch ungeschickte Wahl der Vorkonditionierungsmethode die Systemmatrix zu deäquilibrieren und damit die Konvergenz deutlich zu verschlechtern. Der Auswahl der Vorkonditionierungsmethode ist daher im Rahmen numerischer Voruntersuchungen besondere Aufmerksamkeit zu widmen.

Es bieten sich mehrere Möglichkeiten der Vorkonditionierung an. Bei der einfachen Möglichkeit der *Skalierung* wird das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$  durch eine Transformation in das Gleichungssystem  $\mathbf{B} \cdot \vec{y} = \vec{c}$  überführt. Dabei werden zwei Matrizen  $\mathbf{K}_1$  und  $\mathbf{K}_2$  eingeführt, so dass gilt (HAHNE, 1992):

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}_2, \quad \vec{\mathbf{y}} = \mathbf{K}_2^{-1} \cdot \vec{\mathbf{x}}, \quad \vec{\mathbf{c}} = \mathbf{K}_1 \cdot \vec{\mathbf{b}}.$$

Im einfachsten Fall sind  $\mathbf{K}_1$  und  $\mathbf{K}_2$  Diagonalmatrizen.

Eine andere Möglichkeit ist, die Systemmatrix in Dreiecksmatrizen zu zerlegen, was auch *unvollständige Dreieckszerlegung* oder ILU-Zerlegung genannt wird. Beide Strategien werden ausführlich von HAHNE (1992) diskutiert.

Der PSBCGR- und der PQMR-Algorithmus verwenden die sogenannte *Jacobi-Vorkonditionierung* (SAAD, 1995), die im Prinzip einer einfachen Skalierung entspricht. Hierbei wird die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  mit ihrer eigenen Diagonalmatrix skaliert. Dabei werden die Matrizen  $\mathbf{K}_1$  und  $\mathbf{K}_2$  definiert als:

$$\mathbf{K}_1 = \text{diag}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^{-1}.$$

Die Jacobi-Vorkonditionierung wird daher auch als *Diagonalskalierung* bezeichnet.

Der COCGSSOR-Algorithmus verwendet als Vorkonditionierung das Verfahren der *sukzessiven symmetrischen Überrelaxation*, das auch als SSOR-Verfahren bezeichnet wird. Hierbei wird die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  in eine untere und obere Dreiecksmatrix ( $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{F}$ ) und eine Diagonalmatrix  $\mathbf{D}$  zerlegt und durch die daraus konstruierte Matrix  $\mathbf{H}$  angenähert, so dass gilt (HAHNE, 1992):

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{H} = \left( \frac{1}{\omega_1} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\omega_2} \cdot \mathbf{D} \right) \cdot \omega_2 \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \left( \frac{1}{\omega_1} \cdot \mathbf{F} + \frac{1}{\omega_2} \cdot \mathbf{D} \right).$$

Die Wahl der Parameter  $\omega_1$  und  $\omega_2$  beeinflussen die Konvergenzgeschwindigkeit des Lösealgorithmus. Ist  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  so heißt das Verfahren *symmetrische Gauß-Seidel-Vorkonditionierung* und ist Teil des COCGSSOR-Lösealgorithmus. Optimale Werte können aber nicht a priori abgeleitet werden, sondern müssen in praktischen Versuchen ermittelt werden (HAHNE, 1992). Das SSOR-Verfahren konvergiert aber nur dann, wenn für die Parameter  $\omega_1$  und  $\omega_2$  Werte im Intervall  $[0, 2]$  gewählt werden (KAHAN, 1958).

Auf den ersten Blick empfiehlt sich eine Skalierung als Vorkonditionierung insbesondere bei sehr unterschiedlichen Gitterschrittweiten und inhomogenen Materialverteilungen wie bei den hier betrachteten numerischen Modellen, da dann die ursprüngliche Systemmatrix mit sehr verschiedenen großen Zahlen besetzt ist, was zu einer großen Konditionszahl und damit zu schlechten Konvergenzgeschwindigkeiten führt. Allerdings haben bereits die numerischen Experimente von HAHNE (1992) gezeigt, dass diese Aussage keine allgemeine Gültigkeit besitzt. Insbesondere zeigte die SSOR-Vorkonditionierung bei verlustbehafteten Problemen mit unterschiedlichen Gitterschrittweiten Nachteile gegenüber einfachen Skalierungsverfahren, wie z. B. der Jacobi-Vorkonditionierung. Dies wurde auch bei den unten aufgeführten numerischen Experimenten deutlich.

Ob eine Vorkonditionierung positive oder negative Eigenschaften bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit des Lösealgorithmus zeigt, muss daher in jedem Einzelfall überprüft werden.

### 5.2.3 Probleme der offenen Randbedingung

Bereits in Kapitel 2.3 wurde die Problematik der Wahl der Randbedingungen angesprochen. Neben den einfachen Fällen, ideal elektrisch oder magnetisch leitende Ränder anzunehmen, gibt es die Möglichkeit, offene Randbedingungen zu wählen, die einen reflexionsfreien Anschluss des Rechenvolumens an den freien Raum simulieren. Dies bedeutet, dass Wellen, die auf den Rand des Rechengebietes auftreffen, reflexionsfrei absorbiert werden. Eine algebraische Darstellung der numerischen Implementation dieser Randbedingung als Differentialgleichungssystem erster Ordnung findet sich bei VAN RIENEN UND WEILAND (1988) und VAN RIENEN UND WEILAND (1990).

Aufgrund der hier betrachteten Szenarien ist es zweckmäßig, an den Rändern der betrachteten Rechenvolumina die offenen Randbedingungen anzunehmen, um so die Problemsituationen aus der medizinischen Praxis am besten wiederzugeben. Die Verwendung dieser Randbedingung ist aber nicht unproblematisch, da sie nicht vollkommen reflexionsfrei ist. So ist eine ausreichende Reflexionsfreiheit nur für die senkrecht einfallenden Wellenanteile gewährleistet (MAFIA, 2000B).

Um diese Probleme in den Griff zu bekommen, empfiehlt es sich, den Abstand zwischen der modellierten Struktur und dem Rand des Rechenvolumens genügend groß zu wählen. Über die absolute Größe des Abstandes werden in der entsprechenden Literatur keine konkreten Angaben gemacht, da jede Vergrößerung des Abstandes zwischen modellierter Struktur und Rand mit zusätzlichen Gitterknoten erkauft werden muss und dies den Speicherbedarf und die Rechenzeit deutlich erhöht. Im praktischen Fall sind für gewöhnlich Kompromisse notwendig.

Da es keine festen Regeln bezüglich des Abstandes zwischen Modell und Rand gibt, sind im Einzelfall jeweils zusätzliche Voruntersuchungen notwendig. Dabei hat sich gezeigt, dass ein Abstand von zehn, minimal fünf Gitterzellen zwischen Modell und Rand noch akzeptable Ergebnisse ergibt. Falls genügend Speicherplatz und Rechenzeit zur Verfügung steht, dann ergeben die Abstände vom Rand, die mehr als eine Wellenlänge der anregenden Frequenz betragen, die besten Ergebnisse. Aus diesen Erfahrungswerten folgt, dass der zur Verfügung stehende Speicherplatz zur Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit und Lösungsqualität zu einer Vergrößerung des Modellabstandes zum Rand verwendet werden sollte.

### 5.2.4 Interne Zahlendarstellung und Gitterverfeinerung

Eine weitere Möglichkeit, die Konvergenzgeschwindigkeit zu beeinflussen, ist die Auswahl der internen numerischen Genauigkeit. Das Programmpaket MAFIA bietet die Möglichkeit mit einfacher oder doppelter Genauigkeit (*single* oder *double precision*) zu rechnen. Dabei werden pro gespeicherter Gleitkommazahl entweder vier oder acht Byte verwendet.

Die Verwendung von doppelter Genauigkeit empfiehlt sich generell bei numerischen Problemen mit großen Schrittweitenunterschieden und inhomogenen Materialverteilungen (HAHNE, 1992). Allerdings ist der Speicherbedarf dann doppelt so groß, was die Zahl der möglichen Gitterknotenpunkte halbiert und damit die räumliche Diskretisierung und Auflösung einschränkt. Daher sind oft Kompromisse nötig.

Da dieser Parameter einen entscheidenden Einfluß auf die Konvergenzgeschwindigkeit haben kann, wurden im Rahmen der numerischen Voruntersuchungen alle Simulationen sowohl in einfacher, als auch in doppelter Genauigkeit durchgeführt.

Die Gesamtanzahl der Gitterknoten eines numerischen Modells wird in erster Linie durch den verfügbaren oder durch das Programm verwaltbaren Speicherplatz beschränkt. Durch diese Einschränkungen ergeben sich Grenzen für die Modellierung und die Komplexität eines Modells. Eine zweite Einschränkung ergibt sich durch den Anstieg der Rechenzeit bei einer Zunahme der Gitterknoten.

Um Gitterknoten einzusparen gibt es daher die Möglichkeit, ein Gitternetz mit unterschiedlichen Gitterschrittweiten zu verwenden. Dadurch ist es möglich an Stellen des Modells von besonderem Interesse, z. B. an der Spitze einer implantierten Elektrode, feiner aufzulösen. An den Rändern des Modells kann eine grobe Auflösung gewählt werden, um den in Abschnitt 5.2.3 angesprochenen Problemen bei Verwendung der offenen Randbedingung zu begegnen. Abbildung 2.2 zeigt diese Möglichkeit der Gitterverfeinerung an einem hochauflösten Modell des menschlichen Kopfes.

Weiterhin empfiehlt sich eine Verfeinerung des Gitters bei Übergängen von Materialien mit sehr unterschiedlichen dielektrischen Eigenschaften, da es hier zu großen Sprüngen in den Feldgrößen kommen kann. Mit ein Grund dafür sind die in Abschnitt 2.2.1 angesprochenen Näherungsmatrizen, die als lineare Approximatoren für die Feldgrößen bei Übergängen zwischen verschiedenen Materialien dienen. Eine Verfeinerung des Gitters kann hier zu einer Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit führen.

Dies gilt aber nicht unbegrenzt, da durch jede Verfeinerung die Konditionszahl der Systemmatrix erhöht wird, was wiederum zu einer Verschlechterung der Konvergenz führt, wie auch in Abschnitt 5.2.2 beschrieben wird. Diese Verschlechterung der Konvergenz kann auch durch eine zusätzliche Vorkonditionierung der Systemmatrix nicht vollständig ausgeglichen werden. Bei der Gitterverfeinerung ist daher darauf zu achten, dass der durch die Gitterverfeinerung gewonnene Vorteil nicht durch eine zu große Verfeinerung wieder zunichte gemacht wird.

Da keine festen Regeln für die optimale Gitterverfeinerung abgeleitet werden können, muss die optimale Gitterstruktur durch die sukzessive Adaption des Gitters eines Modells in einzelnen numerischen Testläufen ermittelt werden. Die optimale Gitterkonfiguration ist nach HAHNE (1992) dann gefunden, wenn „sich die relevanten Parameter bei Variation der Diskretisierung nur noch schwach ändern“. Praktischerweise geht man in diesem Fall von einem möglichst einfachen Gitter aus und verfeinert dann sukzessive an Punkten, die von besonderem Interesse sind unter Beachtung des Verhaltens der Konvergenzgeschwindigkeit und der benötigten Rechenzeit.

Als Faustregel hat sich gezeigt, dass der Schrittweitenunterschied in einem Modell zwischen der größten und kleinsten vorkommenden Schrittweite nicht mehr als den Faktor zehn betragen sollte, da sonst eventuelle Vorteile bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit durch die Verfeinerung wieder verloren gehen. Dies wird auch durch die Hinweise in MAFIA (2000B) bestätigt. Dies zeigt sich insbesondere bei den Modellen in Kapitel 8, bei denen aufgrund der Modellstruktur Gitterschrittweitenunterschiede bis zu einem Faktor 1 000 notwendig waren. Dadurch stieg die Zahl der benötigten Iterationsschritte bis zum Erreichen einer akzeptablen Näherung um ungefähr den Faktor zehn an.

### 5.2.5 Kontrolle der Lösungen

Aufgrund der Tatsache, dass bei verlustbehafteten Problemen mit unterschiedlichen Gitterschrittweiten die Konditionszahl der Systemmatrix sehr hoch sein kann, kann sich trotz entsprechender Vorkonditionierung auch mit hohen Iterationsschrittzhahlen keine zufriedenstellende

Konvergenzgeschwindigkeit einstellen. Aber selbst wenn sich durch ein kleines Residuum eine zufriedenstellende Konvergenz des Verfahrens ergibt, ist das nicht gleichbedeutend mit einem kleinen Fehler zwischen iterierter Lösung des Gleichungssystems und tatsächlicher Lösung. Dies kann durch folgende Überlegung begründet werden: sei im  $k$ -ten Iterationsschritt der Vektor  $\vec{r}_k$  das Residuum<sup>1</sup> zur Lösung  $\vec{x}_k$ , dann ergibt sich zwischen Residuum  $\vec{r}_k$  und Iterationsfehler  $\vec{e}_k$  folgender Zusammenhang:

$$\vec{r}_k = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_k - \vec{b} = \mathbf{A} \cdot \left( \vec{x}_k - \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} \right) = \mathbf{A} \cdot (\vec{x}_k - \vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{e}_k . \quad (5.1)$$

Der Term  $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}$  stellt dabei die exakte Lösung des Gleichungssystems dar. Die Differenz zwischen exakter und iterierter Lösung ergibt den Iterationsfehler  $\vec{e}_k = \vec{x}_k - \vec{x}$ . Analog gilt dann auch

$$\vec{e}_k = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{r}_k . \quad (5.2)$$

Betrachtet man nun die euklidische Norm von Gleichung (5.1) und verwendet nach HACKBUSCH (1990) die Dreiecksungleichung, so ergibt sich:

$$\|\vec{r}_k\| = \|\mathbf{A} \cdot \vec{e}_k\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\vec{e}_k\| . \quad (5.3)$$

Analog ergibt sich mit der selben Überlegung aus Gleichung (5.2):

$$\|\vec{e}_k\| = \|\mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{r}_k\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\vec{r}_k\| . \quad (5.4)$$

Durch geschicktes Einsetzen ergibt sich aus den Gleichungen (5.3) und (5.4) nach SAAD (1995) folgende Ungleichung:

$$\frac{\|\vec{e}_k\|}{\|\vec{e}_0\|} \leq \eta \cdot \frac{\|\vec{r}_k\|}{\|\vec{r}_0\|} . \quad (5.5)$$

In dieser Gleichung bezeichnet  $\eta$  die *Spektralkondition* der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ , die über die euklidische Norm definiert ist als  $\eta = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$  (HACKBUSCH, 1990). Hierbei ist zu beachten, dass die Spektralkondition  $\eta$  und die bereits eingeführte Konditionszahl  $\chi$  einer Matrix unterschiedlich definiert werden.

Aus Gleichung (5.5) ergibt sich ein Dilemma. Zwar lässt sich für den relativen Fehler  $\|\vec{e}_k\| / \|\vec{e}_0\|$  immer eine obere Grenze mit Hilfe des Residuums definieren. Allerdings ist dazu die Kenntnis des Residuums allein nicht ausreichend. Zusätzlich ist die Kenntnis der Konditionszahl  $\eta$  notwendig. Diese kann aber nur angegeben werden, wenn die Inverse der Systemmatrix bekannt ist. Wäre wiederum diese bekannt, dann wäre das numerische Problem bereits gelöst.

Da die Spektralkondition unbekannt ist, ist eine Aussage über den Fehler des Verfahrens allein durch Kenntnis des Residuums unmöglich. Es ist weiterhin ersichtlich, dass eine große Spektralkondition für die Abschätzung des Iterationsfehlers nachteilig ist. Aus diesem Grund wird

<sup>1</sup> Mit *Residuum*  $\vec{r}$  wird die Differenz zwischen rechter und linker Seite der Gleichung  $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$  bezeichnet. Konvergiert das numerische Verfahren, so geht das Residuum gegen Null.

den in Abschnitt 5.2.2 angesprochenen Verfahren zur Vorkonditionierung der Systemmatrix so viel Bedeutung beigemessen, um eine Konditionszahl der Systemmatrix möglichst nahe bei eins zu erreichen. Allerdings kann, wie bereits dort angemerkt, eine Vorkonditionierung auch einen gegenteiligen Effekt haben und die Konditionszahl der Systemmatrix erhöhen.

Da die Spektralkondition der Systemmatrix schwer zu ermitteln ist, ist das Residuum allein nicht ausreichend für eine Beurteilung über die Qualität der numerischen Lösung und des numerischen Fehlers. HAHNE (1992) schlägt daher als weitere Möglichkeit zur Überprüfung der Lösung die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung<sup>2</sup> im Rechenvolumen vor. Dazu wird folgende diskrete Gleichung im gesamten Gitter ausgewertet (MAFIA, 2000b):

$$\tilde{\mathbf{S}} \cdot (\vec{\mathbf{j}}_e + j\omega \cdot \mathbf{D}_e \vec{\mathbf{e}}) = \xi . \quad (5.6)$$

Als Qualitätsmaß dient der Wert der skalaren Größe  $\xi$ . Die iterierte Lösung ist als umso besser anzusehen, je besser die Kontinuitätsgleichung erfüllt wird. Dies ist gleichbedeutend mit möglichst kleinen Werten für  $\xi$  nahe bei Null.

Zusätzlich dazu ist es notwendig jede Lösung in Augenschein zu nehmen und auf physikalische Plausibilität zu überprüfen. So sind zum Beispiel Stromflüsse in Gebieten des Rechenvolumens, die keine Leitfähigkeit besitzen, nicht möglich.

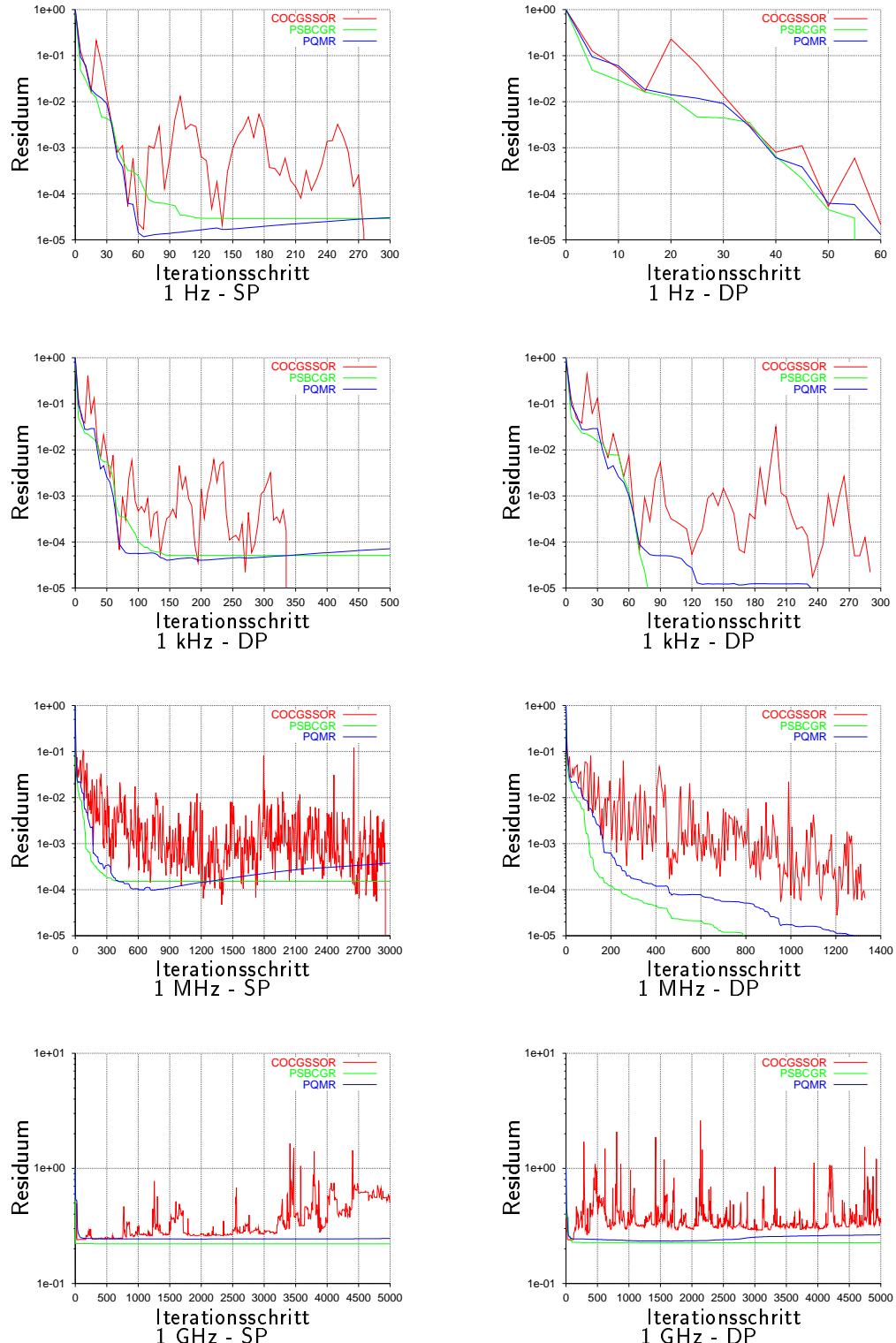
Aufgrund der Tatsache, dass für die hier vorgestellten Modelle in einigen Fällen experimentelle Daten aus anderen Quellen vorliegen, ergibt sich bei der Abschätzung der Erwärmung von Körpergewebe noch die Möglichkeit den Energieverlust im Rechenvolumen als Qualitätsmerkmal zu verwenden. Es hat sich gezeigt, dass sich bei falscher Parameterwahl für den Lösealgorithmus trotz guter Konvergenz und Erfüllung der Kontinuitätsgleichung unverhältnismäßig hohe Energieverluste im Rechenvolumen ergeben haben, die zu viel höheren Erwärmungen geführt haben, als dies im Rahmen der experimentellen Studien beobachtet worden wäre. Die genauere Betrachtung der Lösung führte dann auf die falsche Parameterwahl.

Liegen keine experimentellen Vergleichsdaten vor oder gibt es keine analytische Lösung, so bleiben für die Kontrolle der numerischen Lösungen nur die oben beschriebenen Methoden. In diesen Fällen sind die berechneten Ergebnisse in jedem Fall unter Vorbehalt zu verstehen, bis sie z. B. einer experimentellen Überprüfung standgehalten haben. Dies zeigen auch im folgenden die Ergebnisse der numerischen Testsimulationen.

### 5.2.6 Ergebnisse der numerischen Testsimulationen

Die numerischen Modelle in dieser Arbeit werden in einem großen Frequenzbereich untersucht, so dass im Rahmen der numerischen Voruntersuchungen die Frequenz als eigenständiger Parameter berücksichtigt werden muss. Als Werte für die Anregungsfrequenz wurden 1 Hz, 1 kHz, 1 MHz und 1 GHz gewählt. Als Gleichungstyp wird, wie in Abschnitt 5.2.1 begründet, die diskrete Curl-Curl-Eigenwertgleichung verwendet. Diese wird jeweils mit dem COCGSSOR-, PSBCGR-

<sup>2</sup>Die Kontinuitätsgleichung drückt aus, dass eine zeitliche Abnahme der Ladung innerhalb eines kleinen Volumens einem Ladungsstromfluss durch die Oberfläche des Volumens entsprechen muss, da der Gesamtbetrag der Ladung erhalten bleibt, also  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial\rho/\partial t = 0$  gilt. Mit Hilfe der dritten Maxwell-Gleichung (2.3) kann die Kontinuitätsgleichung auch geschrieben werden als  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E}) = 0$  und ist so Grundlage für die Gitter-Kontinuitätsgleichung (5.6).



**Abbildung 5.2:** Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit des COCGSSOR-, PSBCGR- und PQMR-Algorithmus des Frequenzbereichslösers W3 bei vier verschiedenen Frequenzen, sowie einfacher und doppelter Genauigkeit. Die Iteration wurde jeweils nach 5000 Schritten oder bei Unterschreiten eines Residuums von  $1 \cdot 10^{-5}$  abgebrochen. Das untersuchte numerische Modell ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

Frequenz	COCGSSOR	PSBCGR	PQMR
1 Hz	$3,6 \cdot 10^{-13}$ W	$6,7 \cdot 10^{-13}$ W	$3,9 \cdot 10^{-13}$ W
1 kHz	$5,2 \cdot 10^{-6}$ W	$6,0 \cdot 10^{-6}$ W	$4,7 \cdot 10^{-6}$ W
1 MHz	$8,0 \cdot 10^{-1}$ W	$1,0 \cdot 10^0$ W	$8,0 \cdot 10^{-1}$ W
1 GHz	$5,6 \cdot 10^{-4}$ W	$5,9 \cdot 10^{-1}$ W	$1,7 \cdot 10^{-3}$ W
1 Hz	$6,6 \cdot 10^{-13}$ W	$6,6 \cdot 10^{-13}$ W	$6,6 \cdot 10^{-13}$ W
1 kHz	$4,2 \cdot 10^{-7}$ W	$4,1 \cdot 10^{-6}$ W	$4,0 \cdot 10^{-6}$ W
1 MHz	$8,4 \cdot 10^{-1}$ W	$8,5 \cdot 10^{-1}$ W	$8,4 \cdot 10^{-1}$ W
1 GHz	$1,3 \cdot 10^{-4}$ W	$2,1 \cdot 10^{-2}$ W	$2,6 \cdot 10^{-3}$ W

**Tabelle 5.1:** Deponierte Leistung im Testmodell bei einfacher (obere Tabellenhälfte) und doppelter Genauigkeit (untere Tabellenhälfte) nach 5 000 Iterationen. Die berechneten Leistungen unterscheiden sich zwischen den verwendeten Algorithmen bei einfacher Genauigkeit erheblich. Verwendet man eine doppelt genaue Zahlendarstellung, so ergeben sich mit den verschiedenen Lösealgorithmen bis auf die Ergebnisse bei einer Anregungsfrequenz von 1 GHz fast die gleichen Ergebnisse. Die Abweichungen bei 1 GHz ergeben sich aus der schlechten Konvergenzgeschwindigkeit des Residuums.

und PQMR-Algorithmus mit einfacher und doppelter Genauigkeit gelöst. Im einzelnen ergeben sich so 24 Simulationsläufe.

Aufgrund der in Abschnitt 5.2.2 angesprochenen Probleme, wurde bei diesen numerischen Tests auf eine zusätzliche Vorkonditionierung neben den bereits in den Algorithmen enthaltenen Vorkonditionierungen verzichtet. Numerische Testläufe, die die anderen Gleichungstypen und Vorkonditionierungsmöglichkeiten miteinander vergleichen findet man bei HAHNE (1992).

Abbildung 5.2 zeigt die Residuenverläufe der 24 Simulationsrechnungen. Der Vergleich zwischen einfacher und doppelter Genauigkeit bei der internen Zahlendarstellung der numerischen Algorithmen zeigt deutliche Vorteile bei Verwendung doppelter Genauigkeit. In der Regel wird das geforderte Residuum viel schneller erreicht, insbesondere auch bei den Fällen, bei denen bei einfacher Genauigkeit die Iterationsverfahren divergieren. Dies ist bereits bei einer Anregungsfrequenz von 1 Hz zu erkennen. Bei einfacher Genauigkeit erreicht das COCGSSOR-verfahren erst nach 270 Iterationen das geforderte Residuum. Das PQMR-Verfahren divergiert, nachdem es ein Minimum erreicht hat. Das PSBCGR-Verfahren stagniert nach 150 Schritten. Bei Verwendung der doppelt genauen Zahlendarstellung erreichen alle drei Verfahren nach ca. 50 Schritten das geforderte Residuum.

Ähnlich sieht es bei 1 kHz und 1 MHz aus. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist bei doppelt genauer Zahlendarstellung deutlich besser. Für das PSBCGR- und das PQMR-Verfahren scheint eine doppelt genaue Zahlendarstellung sogar obligatorisch zu sein. Bei diesen beiden Frequenzen zeigt sich das PSBCGR-Verfahren den beiden anderen Algorithmen überlegen, da das geforderte Residuum schneller erreicht wird.

Bei einer Anregungsfrequenz von 1 GHz konnte bei keinem der Testläufe nach 5 000 Iterationsschritten das geforderte Residuum erreicht werden. Aufgrund der Kurvenverläufe ist es schwer abzuschätzen, ob durch eine Erhöhung der Iterationschritte das geforderte Residuum erreicht werden würde. Berechnungen in diesem Frequenzbereich stoßen daher auf nicht unerhebliche Schwierigkeiten.

Frequenz	COCGSSOR	PSBCGR	PQMR
1 Hz	$7,3 \cdot 10^{-9}$	$7,3 \cdot 10^{-9}$	$7,3 \cdot 10^{-9}$
1 kHz	$8,2 \cdot 10^{-7}$	$6,1 \cdot 10^{-7}$	$3,8 \cdot 10^{-7}$
1 MHz	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$9,7 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$
1 GHz	$4,1 \cdot 10^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$9,3 \cdot 10^{-2}$
1 Hz	$9,6 \cdot 10^{-6}$	$9,2 \cdot 10^{-6}$	$9,9 \cdot 10^{-6}$
1 kHz	$6,9 \cdot 10^{-6}$	$5,2 \cdot 10^{-6}$	$9,1 \cdot 10^{-6}$
1 MHz	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$9,9 \cdot 10^{-6}$	$9,9 \cdot 10^{-6}$
1 GHz	$3,1 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$

**Tabelle 5.2:** Erfüllung der Kontinuitätsgleichung im Testmodell bei einfacher (obere Tabellenhälfte) und doppelter Genauigkeit (untere Tabellenhälfte) nach 5 000 Iterationen. Als Qualitätsmaß der numerischen Lösung wird die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung (5.6) im Rechenvolumen überprüft. Die Gleichung ist umso besser erfüllt, je kleiner der Restbetrag  $\xi$  ist. Bei einfacher Genauigkeit ergeben sich sogar kleinere Werte für  $\xi$ , die eine bessere Qualität der Lösung suggerieren. Bei einem Vergleich mit Tabelle 5.1 wird diese Vermutung allerindgs nicht bestätigt. Die Leistungswerte differieren bei einfacher Genauigkeit sehr voneinander.

Die Residuenverläufe zeigen, dass auch die Anregungsfrequenz die Konditionszahl der Systemmatrix beeinflusst, da dieser Parameter nach Gleichung (2.30) quadratisch in die Systemmatrix eingeht und dadurch bei steigender Frequenz die Konditionszahl erhöht.

Als weiteres Qualitätsmerkmal wurde die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung, sowie der Energieverlust im Rechenvolumen berechnet. Tabelle 5.1 zeigt die deponierte Leistung im Körpermodell bei einfacher und doppelter Genauigkeit. Die Verlustleistung im Rechenvolumen wurde dabei mit Hilfe von Gleichung (2.57) bestimmt (vgl. dazu auch die Ausführungen in Unterkapitel 2.6). Die Werte zeigen bei einfacher Genauigkeit bei den verschiedenen Algorithmen Unterschiede. Erst die Berechnung mit doppelter Genauigkeit ergibt bis auf die Werte bei einer Anregungsfrequenz von 1 GHz ungefähr die gleichen Ergebnisse.

Aufgrund der unterschiedlichen Ergebnisse bei einfacher Genauigkeit kann ohne die Kenntnis der Ergebnisse bei doppelter Genauigkeit nicht abgeschätzt werden, welche Lösungen als „richtig“ anzusehen sind. Aus dieser Beobachtung lässt sich nur schlussfolgern, dass für die numerischen Modelle nur Berechnungen mit doppelter Zahlengenauigkeit sinnvoll sind, auch auf Kosten eines höheren Speicherplatzbedarfes.

Ein weiteres Maß für die Qualität der numerischen Lösung ist die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung (5.6). Die Lösung ist als umso besser anzusehen, je näher der Restbetrag  $\xi$  bei Null liegt. Tabelle 5.2 gibt die Restbeträge von  $\xi$  bei einfacher und doppelter Genauigkeit wieder. Bei einfacher Genauigkeit ergeben sich zum Teil sogar kleinere Werte für  $\xi$  was zunächst eine qualitativ bessere Lösung vermuten lässt. Bei einem Vergleich mit den Leistungswerten aus Tabelle 5.1 zeigt sich aber, dass diese Vermutung nicht bestätigt werden kann.

Hier zeigt sich das bereits in Abschnitt 5.2.5 angesprochene Dilemma, dass ein kleines Residuum und eine gute Erfüllung der Kontinuitätsgleichung nicht automatisch eine korrekte Lösung des numerischen Problems bedeuten. Daraus folgt auch, dass diese beiden Merkmale für eine alleinige Beurteilung der Qualität der numerischen Lösung nicht ausreichend sind.

Algorithmus	Genauigkeit	
	einfach	doppelt
COCGSSOR	204 Byte	408 Byte
PSBCGR	204 Byte	408 Byte
PQMR	300 Byte	600 Byte

**Tabelle 5.3:** Speicherbedarf in Byte der einzelnen Lösealgorithmen pro Gitterknotenpunkt für einfache und doppelte Genauigkeit.

Als zusätzliche Maßnahme empfiehlt sich die Betrachtung der Leistungsabsorption im Rechenvolumen, auch unter dem Gesichtspunkt, ob die ermittelten Werte für die Verlustleistung im Rechenvolumen angemessen sind. Hierbei muss ggfs. auf Erfahrungswerte und experimentelle Daten zurückgegriffen werden. Dennoch ist auch diese Möglichkeit der Qualitätskontrolle nicht aussagekräftig genug, wenn keine Vergleichsdaten existieren, so dass im Endeffekt die berechneten Feldverteilungen im einzelnen betrachtet und bewertet werden müssen, wobei aber immer noch Unsicherheiten bestehen bleiben.

### 5.2.7 Rechenzeit und Speicherbedarf

Ein weiterer Punkt im Rahmen der numerischen Voruntersuchungen waren Testläufe auf verschiedenen Rechnerarchitekturen, um Aussagen über den Zeitbedarf der einzelnen Algorithmen machen zu können. Die Kenntnis der notwendigen Prozessorzeit pro Iterationszyklus und Knotenpunkt erlaubt dann a priori eine ungefähre Abschätzung der gesamten Rechendauer.

Als Testmodell wurde wieder das Körpermodell aus Abbildung 5.1 mit einem Helmholtzspulensystem als Feldanregung mit einer Frequenz von 1 MHz verwendet. Die Gesamtzahl der Iterationsschritte wurde auf 5 000 Schritte eingestellt und die Zeitspanne für die gesamte Iteration gemessen. Das Residuum als Abbruchkriterium wurde dabei so klein gewählt, dass jeder Algorithmus alle 5 000 Iterationsschritte ausführen musste.

Die Berechnungen wurden auf zwei verschiedenen Unix-Systemen durchgeführt. Auf beiden Systemen wurde während der Ausführung der Testläufe sichergestellt, dass die benutzten Prozessoren<sup>3</sup> und Hauptspeicherbereiche exklusiv für die numerische Software zur Verfügung standen. Diese Exklusivnutzung ist aber in der Regel bei diesen Vielbenutzersystemen nicht gegeben. Als Hardware wurde ein Knoten eines IBM SP-SMP Superparallelrechners mit einem Power 3-II Prozessor mit 375 MHz, sowie als Vergleich ein Knoten einer SGI ORIGIN 2000 mit einem MIPS R10000 Prozessor mit 195 MHz verwendet.

Der Speicherbedarf für das Testmodell hängt zum einen vom verwendeten Algorithmus und zum anderen von der internen Zahlendarstellung ab. Bei doppelter Genauigkeit ist pro Gitterknotenpunkt der doppelte Speicherplatz notwendig. Ein gewichtiger Nachteil des Programmpaketes ist, dass keine dynamische Speicherplatzallokation während der Ausführung des Lösealgorithms möglich ist. Daher bricht die numerische Iteration ab, wenn zu wenig Speicherplatz reserviert

---

<sup>3</sup>Das Programmpaket MAFIA bietet keine parallelisierten Programmversionen an. Bei den Testläufen wurde daher lediglich immer nur ein Prozessor exklusiv für den numerischen Prozess belegt.

wurde, was bei großen numerischen Simulationsläufen, die skriptgesteuert im Hintergrund laufen, zwangsläufig zu zeitaufwändigen Neustarts führt. Die Kenntnis des Speicherplatzbedarfes der einzelnen Algorithmen ist daher von Vorteil. Tabelle 5.3 gibt diesen Speicherplatzbedarf an. Diese Tabellenwerte umfassen den gesamten Speicherbedarf für alle Vektoren und die Systemmatrix. Anhand dieser Angaben ist es möglich, vor dem Aufruf des eigentlichen Lösealgorithms, den notwendigen Hauptspeicher zu reservieren.

Der Speicherplatzbedarf des Testmodells liegt bei einfacher Genauigkeit bei ungefähr 104 MB bei Verwendung des COCGSSOR- und des PSBCGR-Algorithmus. Für den PQMR-Algorithmus werden bei einfacher Genauigkeit aufgrund zusätzlich abgespeicherter Iterationsmatrizen ungefähr 152 MB benötigt. Bei doppelter Genauigkeit steigt der Speicherbedarf auf 208 MB für den COCGSSOR- und den PSBCGR-Algorithmus, sowie 304 MB für den PQMR-Algorithmus an.

Das Softwarepaket MAFIA ist eine 32-Bit-Applikation und ist daher in der Lage einen maximalen Hauptspeicherbereich von  $2^{31}$  Bit oder 2 GB zu adressieren. Dadurch wären theoretisch bei einfacher Genauigkeit Probleme mit bis zu 10,5 Millionen Gitterknotenpunkten mit dem COCGSSOR- oder PSBCGR-Algorithmus lösbar, vorausgesetzt, der dazu notwendige Hauptspeicher steht dem Anwender zur Verfügung. Bei doppelter Genauigkeit und bei Verwendung des PQMR-Algorithmus sinkt die Zahl der möglichen Knotenpunkte auf 3,6 Millionen.

Nimmt man an, dass in jeder Raumrichtung eines dreidimensionalen Gitters gleich viele Gitterkanten existieren, kann man durch das Ziehen der dritten Wurzel aus der möglichen Gesamtknotenzahl die Anzahl der Kanten pro Raumrichtung berechnen, um so eine Vorstellung der möglichen räumlichen Diskretisierung zu bekommen. Bei 10,5 Millionen Gitterknoten wären so in jeder Raumrichtung maximal 218 Kanten möglich, bei 3,6 Millionen Gitterknoten nur 153.

Diese Angaben stellen eine theoretische obere Grenze für die Modellkomplexität dar. In der Realität wird man oft darunter liegen, da zum einen nicht der gesamte Hauptspeicher für die Speicherung der Vektoren und Systemmatrix zur Verfügung steht, sondern für das Programm selbst und für weitere Datenfelder benötigt wird. Zum anderen steht nicht in jeder Rechnerkonfiguration ein Hauptspeicher von 2 GB zur Verfügung, so dass die mögliche Komplexität der Modelle von vorneherein eingeschränkt ist. In der Praxis haben sich bei einfacher Genauigkeit Modelle mit bis zu 4 Millionen Knotenpunkten, bei doppelter Genauigkeit mit bis zu 2 Millionen Knotenpunkten, als noch mit vertretbarem Aufwand berechenbar erwiesen.

Ein weiterer wichtiger Gesichtspunkt ist der Anstieg der gesamten Rechenzeit für ein numerisches Modell. Diese steigt linear mit der Anzahl der Gitterknoten an und führt bei großen Modellen zu sehr zeitintensiven Simulationsläufen. Der hohe Rechenzeitbedarf verhindert in diesen Fällen eine große Anzahl von einzelnen Simulationen für numerische Vergleiche oder zahlreiche Wiederholungen einer Simulation mit veränderten Parametern. Die Berechnung von großen Modellen muss daher auf eine kleine Auswahl eingeschränkt werden. Aus diesem Grund sind numerische Voruntersuchungen wichtig und liefern wertvolle Hinweise für die nachfolgende Simulation hochkomplexer Modelle.

Tabelle 5.4 gibt eine Übersicht über die notwendigen Rechenzeiten der einzelnen Algorithmen bei einfacher und doppelter Genauigkeit. Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass der Rechenzeitbedarf pro Knotenpunkt und Iteration bei doppelter Genauigkeit auf beiden Rechnern und bei allen Algorithmen leicht ansteigt. Der Zeitbedarf für den PQMR-Algorithmus liegt dabei über den anderen beiden weniger speicherintensiven Algorithmen. Insgesamt zeigt sich, dass der IBM SP-Knoten im großen und ganzen ungefähr dreimal so schnell wie der SGI ORIGIN-Knoten ist,

Rechner	COCGSSOR	PSBCGR	PQMR
SGI Origin 2000	$9,0 \cdot 10^{-6}$ s	$1,5 \cdot 10^{-5}$ s	$1,8 \cdot 10^{-5}$ s
IBM SP-SMP	$3,7 \cdot 10^{-6}$ s	$4,7 \cdot 10^{-6}$ s	$6,5 \cdot 10^{-6}$ s
Faktor	2,47	3,16	2,76
SGI Origin 2000	$1,1 \cdot 10^{-5}$ s	$1,7 \cdot 10^{-5}$ s	$2,2 \cdot 10^{-5}$ s
IBM SP-SMP	$4,4 \cdot 10^{-6}$ s	$5,5 \cdot 10^{-6}$ s	$8,3 \cdot 10^{-6}$ s
Faktor	2,61	3,12	2,67

**Tabelle 5.4:** Zeitbedarf der einzelnen Algorithmen auf verschiedenen Rechnern bei einfacher (obere Tabellenhälfte) und doppelter Genauigkeit (untere Tabellenhälfte). Die Zeitangaben beziehen sich auf den Zeitbedarf pro Knotenpunkt und Iteration. Um die gesamte Iterationsdauer abzuschätzen, muss der angegebene Wert in Sekunden mit der Gesamtknotenzahl und der Zahl der zu berechnenden Iterationsschritte multipliziert werden. Zusätzlich ist der Geschwindigkeitsunterschied zwischen den beiden Rechnern als Faktor mitangegeben.

was in erster Linie an der höheren Prozessorfrequenz und der schnelleren Speicherbusanbindung dieser Maschine liegt.

Aufgrund der ermittelten Rechenzeiten lassen sich für komplexe Modelle Zeitabschätzungen angeben. Ein hochkomplexes Körpermodell mit 2 Millionen Knotenpunkten würde demnach auf einem Knoten der SGI ORIGIN 2000 bei 10 000 Iterationsschritten, einfacher Genauigkeit und bei Verwendung des PSBCGR-Algorithmus bei exklusiver Prozessor- und Speichernutzung im schnellsten Fall ungefähr 84 h benötigen. Bei doppelter Genauigkeit und bei Verwendung des PQMR-Algorithmus würde die Rechenzeit auf ungefähr 122 h für einen Simulationslauf ansteigen.

Diese Abschätzung ergibt aber nur eine untere Grenze für die zu erwartende Rechenzeit, da bei langdauernden Simulationsläufen auf Mehrbenutzermaschinen nicht immer eine exklusive Belegung für einen Prozessor und Speicherplatz garantiert werden kann und bei hoher Maschinenauslastung die Rechenzeiten beliebig ansteigen können. Weiterhin zeigen diese Zahlen die Beschränkungen bezüglich der Gesamtzahl an Modellrechnungen, da nicht beliebig viele Ressourcen für komplexe Modelle zur Verfügung stehen. Es ist daher stets zu prüfen, ob sich die betrachteten Fragestellungen nicht auch mit weniger komplexen Modellen beantworten lassen.

### 5.2.8 Optimale Wahl der numerischen Parameter

Die Ergebnisse der vorangegangenen numerischen Untersuchungen liefern Hinweise für die Wahl der einzelnen numerischen Parameter zur Lösung von Problemen mit komplexen Körpermodellen.

Die Auswahl der Systemgleichung ist aufgrund der betrachteten verlustbehafteten Probleme vergleichsweise einfach. Die Wahl fällt hier auf die weniger speicherintensive Curl-Curl-Gleichung (2.30), da die erweiterte Formulierung dieser Gleichung als Gitter-Helmholtzgleichung bei verlustbehafteten Problemen keinerlei Vorteile bringt, aber deutlich mehr Speicherplatz benötigt (HAHNE, 1992).

Die Konvergenzverläufe des Residuums in Abbildung 5.2 erlauben eine Auswahl bezüglich Lösealgorithmus und interner Zahlendarstellung. In fast allen untersuchten Fällen konnte bei Verwendung einer doppelt genauen Zahlendarstellung eine bessere Konvergenzgeschwindigkeit des Residuums erreicht, bzw. überhaupt eine Konvergenz erzielt werden. Dies wird auch durch die berechneten Leistungsverluste im Körpermodell unterstützt, die nur bei doppelter Genauigkeit bei allen drei Lösealgorithmen ungefähr die gleichen Werte ergaben. Aus diesem Grund werden die numerischen Modelle von nun an nur bei doppelter Genauigkeit berechnet, auch wenn hierzu mehr Speicherplatz notwendig ist und dadurch die Anzahl der möglichen Gitterknoten halbiert und so die Modellkomplexität stark eingeschränkt wird.

Da die betrachteten Lösealgorithmen (COCGSSOR, PSBCGR und PQMR) bereits über Vorkonditionierungsmechanismen verfügen, ist die Systemmatrix gut äquilibriert. Weitere numerische Experimente, die hier nicht aufgeführt wurden, zeigten keine Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit bei Anwendung verschiedener Skalierungen und bestätigten die Ergebnisse von HAHNE. Auf die Anwendung einer zusätzlichen Skalierung der Systemmatrix wurde daher bei den numerischen Modellen im Rahmen dieser Arbeit verzichtet.

Als Algorithmen zeigten sich der PSBCGR- und der PQMR-Algorithmus dem COCGSSOR-Algorithmus bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit und des Konvergenzverhaltens überlegen (sh. Abbildung 5.2). Der COCGSSOR-Algorithmus scheidet dadurch als Lösealgorithmus für komplexe Körpermodelle aus. Dies Erfüllung der Kontinuitätsgleichung zeigt sich auch in den Ergebnissen in Tabelle 5.2. Der PSBCGR-Algorithmus hat hier zum PQMR-Algorithmus vergleichbar gute Ergebnisse bezüglich der Kontinuitätsgleichung (5.6) und der Energiebetrachtung erzielt.

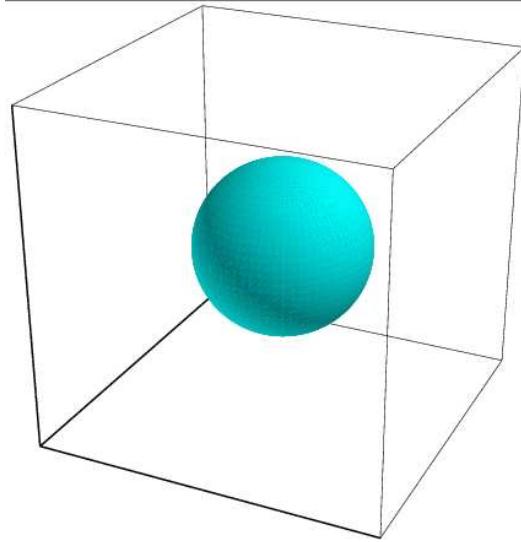
Die Konvergenzgeschwindigkeit des PSBCGR-Algorithmus in Abbildung 5.2 war in vielen Fällen sogar deutlich besser als die des PQMR-Algorithmus, zumal das Residuum des PQMR-Algorithmus nach Erreichen eines Minimums zum Divergieren neigt. Da der PSBCGR-Algorithmus zudem weniger Speicherplatz und Rechenzeit benötigt, ist er dem PQMR-Algorithmus vorzuziehen.

Als optimale Parameter zur Lösung der numerischen Probleme in dieser Arbeit haben sich aufgrund der Ergebnisse der numerischen Voruntersuchungen die Lösung der Curl-Curl-Eigenwertgleichung mit dem PSBCGR-Algorithmus bei doppelter Genauigkeit herausgestellt.

### 5.3 Vergleich der expliziten und impliziten Zeitintegration

Zur Berechnung thermodynamischer Probleme stehen wie in Abschnitt 2.5 beschrieben zwei verschiedene Algorithmen zur Verfügung, die die Biowärmeleitungsgleichung (2.34) im Zeitbereich lösen. Die Auswahl des Algorithmus, der für die Lösung des betrachteten Problems besser geeignet ist, entscheidet sich anhand des Aufbaus und der Struktur des numerischen Modells, sowie der Dauer des Simulationszeitraumes. Anhand eines einfachen numerischen Modells können die beiden Algorithmen und ihre Effizienz direkt miteinander verglichen werden. Aus den gewonnenen Erkenntnissen lassen sich dann Aussagen über die Verwendbarkeit der thermodynamischen Algorithmen bei komplexen numerischen Modellen des menschlichen Körpers ableiten. Ein Vergleich mit einer analytischen Näherungslösung liefert weitere Hinweise über die Genauigkeit der numerischen Verfahren. Diese Punkte werden im folgenden untersucht.

**Abbildung 5.3:** Einfaches numerisches Modell einer Stahlkugel, die mit einem als unendlich groß angenommenen umgebenden Wärmebad im Wärmeaustausch steht. Die Anfangstemperatur der Kugel wurde auf 300 K gesetzt. Die des Wärmebades auf 270 K. Der Radius der Kugel beträgt 0,1 m. Die Abkühlung der Kugel wurde für einen Zeitraum von 1 800 s mittels einer analytischen Näherungslösung und dem expliziten und impliziten thermodynamischen Algorithmus berechnet.



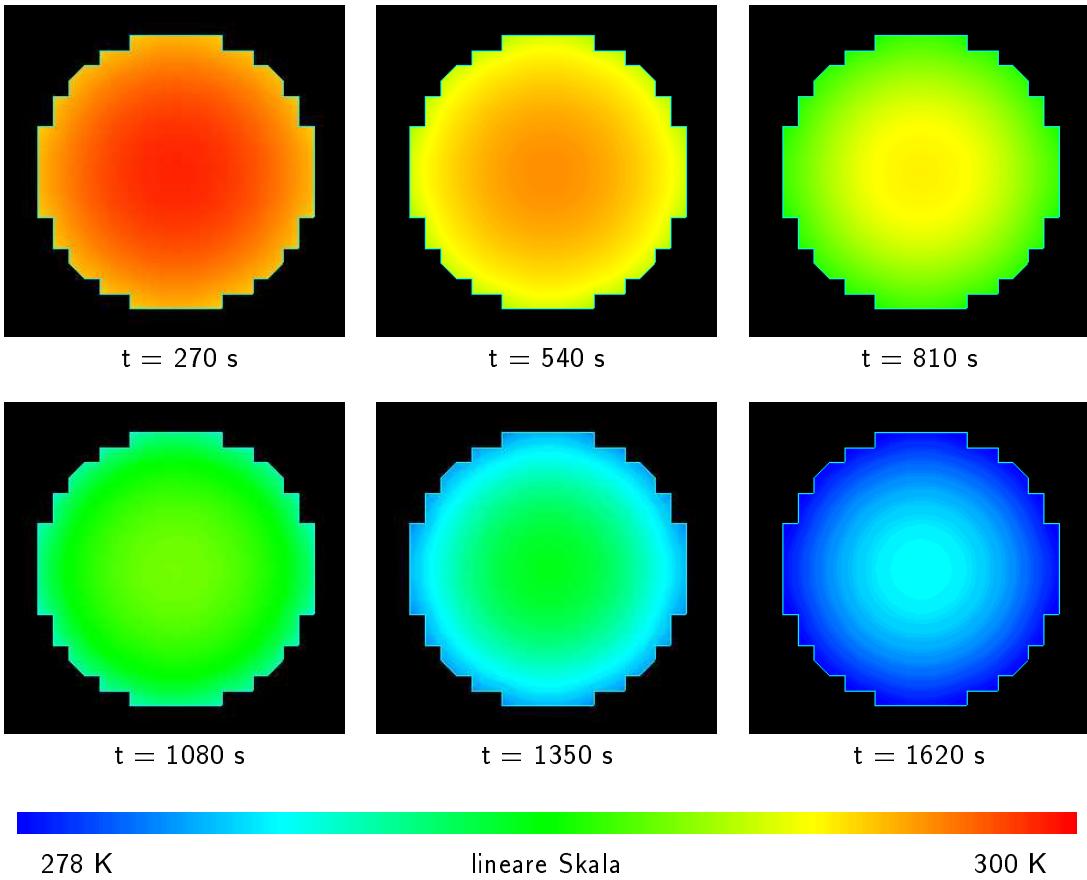
### 5.3.1 Aufbau des Kugelmodells

Als Simulationsbeispiel wurde eine Stahlkugel mit einem Radius von 0,1 m mit einer Anfangstemperatur von 300 K in ein unendlich großes Wärmebad mit einem fluiden Medium von 270 K gebracht und die Abkühlung der Kugel in einem Zeitraum von 1 800 s simuliert (sh. Abbildung 5.3). Als Kugelmateriale wurde V2A-Stahl mit einer Dichte  $\rho$  von 8 000 kg/m<sup>3</sup>, einer spezifischen Wärmekapazität  $c_s$  von 477 J/(kg · K) und einer Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  von 15 W/(m · K) angenommen. Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  wurde auf 75 W/(K · m<sup>2</sup>) gesetzt.

Das numerische Modell aus Abbildung 5.3 besteht aus ca. 50 000 kubischen Voxeln mit einer Gitterschrittweite von 10 mm in allen drei Raumrichtungen. Der Abkühlungsvorgang wurde mit dem expliziten und impliziten Algorithmus mit insgesamt vier verschiedenen festen Zeitschrittweiten simuliert. Der große Gitterabstand ermöglichte unter Berücksichtigung des Stabilitätskriteriums (2.46) Zeitschritte von 0,1 s und 1 s für den expliziten Algorithmus und 0,1 s, 1 s, 10 s und 100 s für den impliziten Algorithmus. Die Zahl der Iterationen wurde so gesetzt, dass bei jedem Simulationslauf eine gesamte simulierte Zeitdauer von 1 800 s erzielt wurde. Die Berechnungen wurden auf einer IBM SP/SMP mit 375 MHz Prozessortakt und 2 GB Hauptspeicher durch-

Algorithmus	explizit		implizit					
	Zeitschritt	Iterationsdauer	0,1 s	1,0 s	0,1 s	1 s	10 s	100 s
			56 s	6 s	1 861 s	238 s	38 s	14 s

**Tabelle 5.5:** Vergleich der Rechenzeiten am Validierungsbeispiel bei Verwendung des expliziten und impliziten Algorithmus mit verschiedenen Zeitschritten. Bei gleicher Zeitschrittweite ist der explizite Algorithmus dem impliziten bezüglich der Iterationsdauer deutlich überlegen. Der implizite Algorithmus ist dann von Vorteil, wenn durch das Stabilitätskriterium (2.46) für den expliziten Algorithmus nur Zeitschrittweiten unter 100 ms möglich sind, wie das z. B. bei kleinen Gitterschrittweiten der Fall ist.

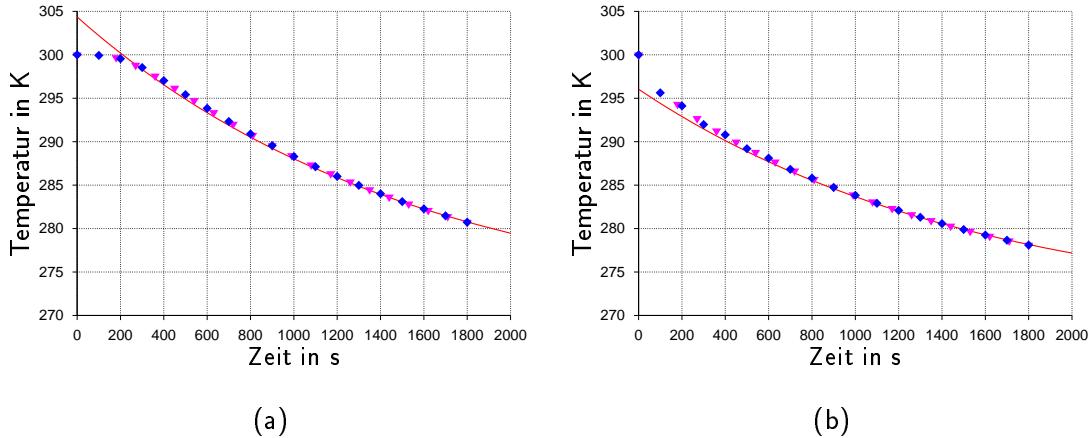


**Abbildung 5.4:** Temperaturverteilung im Innern einer Stahlkugel während eines Abkühlvorganges von einer homogenen Anfangstemperatur von 300 K bei einer Außentemperatur von 270 K zu sechs verschiedenen Zeitpunkten. Die Kugel steht mit dem umgebenden fluiden Medium, welches ein unendlich grosses Wärmereservoir darstellt, im Wärmeaustausch. Die einzelnen Zeitpunkte liegen ausgehend von einem Simulationszeitpunkt von 270 s jeweils 270 s auseinander.

geführt. Um die Effizienz der Algorithmen zu vergleichen, wurde jeweils der Zeitbedarf für die gesamte Iteration aufgezeichnet. In Tabelle 5.5 sind die ermittelten Zeittauern wiedergegeben. Abbildung 5.4 zeigt den Abkühlvorgang am Querschnitt durch das Innere der Kugel an sechs verschiedenen Zeitpunkten während der Simulation.

### 5.3.2 Numerische Ergebnisse

Es zeigte sich, dass der explizite Algorithmus bei gleicher Zeitschrittweite im Vergleich zum impliziten Algorithmus weniger Rechenzeit benötigt, da pro Iteration weniger Berechnungen durchzuführen sind. Beim impliziten Algorithmus kommt, wie in Abschnitt 2.5.2 erläutert, unter Umständen noch der Aufwand für eine Matrixinversion hinzu. Das Kriterium für die Neuberechnung der Systemmatrix ist die absolute maximale Temperaturänderung im Rechenvolumen. Dieser Parameter wurde in diesem Algorithmenvergleich so eingestellt, dass nach jedem Iterationsschritt eine Matrixinversion vorgenommen wurde, was den schlimmsten Fall bezüglich der Rechenzeitdauer darstellt. Der implizite Algorithmus erweist sich erst ab einer Schrittweite von



**Abbildung 5.5:** Vergleich der absoluten Temperaturwerte berechnet mit der Näherungslösung (durchgezogene Linie) nach Gleichung (5.9) und den Ergebnissen des expliziten (Vierecke) und impliziten (Dreiecke) thermodynamischen Algorithmus bei Berechnung der Abkühlung einer Stahlkugel in der Kugelmitte (a) und am Rand (b). Als Zeitschrittweite des expliziten Algorithmus wurde 0,1s und für die des impliziten Algorithmus 100s gewählt. Die Lösungen der beiden Algorithmen unterscheiden sich trotz der großen Zeitschrittdifferenz fast nicht voneinander.

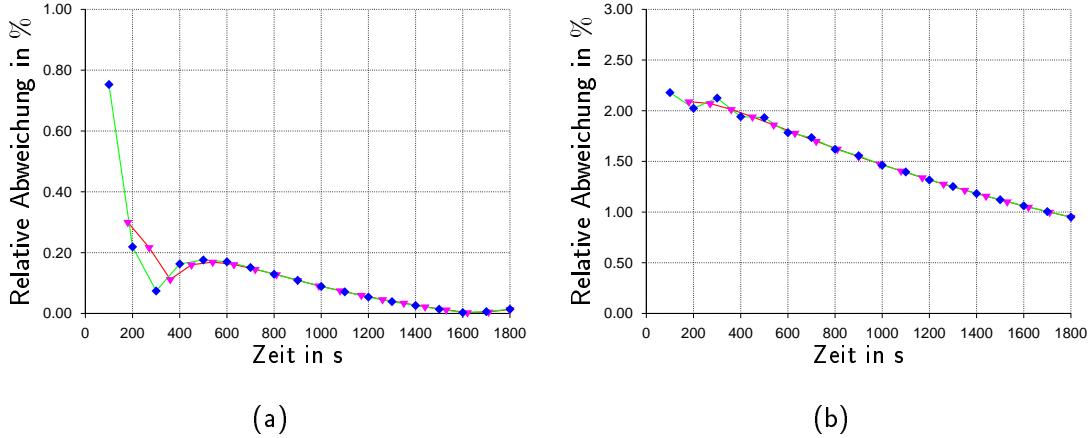
10 s im Vergleich zum expliziten Algorithmus bei einer Zeitschrittweite von 0,1 s als vorteilhaft. Sind für den expliziten Algorithmus sogar größere Schrittweiten möglich, wie z. B. die hier angenommene Schrittweite von 1 s, so ist der implizite Algorithmus selbst bei Verwendung einer Zeitschrittweite von 100 s deutlich langsamer.

Weiterhin lässt Tabelle 5.5 erkennen, dass sich der Zeitbedarf für den impliziten Algorithmus nicht linear zur Zeitschrittweite verhält, wie dies beim expliziten Algorithmus zu erwarten ist, da hier der Aufwand für jeden Iterationsschritt im Prinzip aus einer Matrix-Vektor-Multiplikation besteht und unabhängig von der Schrittweite immer gleich groß ist. Beim impliziten Algorithmus hingegen kann bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit der Matrixinversion a priori keine Aussage gemacht werden.

Daraus lässt sich folgern, dass der weniger aufwändige explizite Algorithmus zu bevorzugen ist, wenn die maximal zulässige stabile Zeitschrittweite und die gewünschte Simulationsdauer nicht zu einer hohen Anzahl an Iterationsschritten führt. Dabei gilt auch zu beachten, dass sich mit jedem Iterationsschritt die Abweichungen der Temperaturverteilung vom realen Fall durch Fehlerfortpflanzung vergrößern (PINDER, 1998). Bezüglich der Zeitintegration ist der Fehler des expliziten Algorithmus nur von erster Ordnung, bei impliziter Zeitintegration von zweiter Ordnung. Dieser Vorteil geht aber bei einer großen Anzahl an Iterationsschritten verloren. Bezüglich der Ortsdiskretisierung sind die Fehler beider Verfahren von zweiter Ordnung, so dass sich daraus kein Vorteil für das eine oder das andere Verfahren ergibt.

### 5.3.3 Analytische Näherungslösung

Für das thermodynamische Kugelproblem existiert eine analytische Lösung (WAGNER, 1993). Die Temperatur  $T$  zu einem Zeitpunkt  $t$  im Abstand  $r$  zum Kugelmittelpunkt kann durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden:



**Abbildung 5.6:** Abweichung zwischen der analytischen Näherungslösung nach Gleichung (5.9) und den Ergebnissen der thermodynamischen Algorithmen ausgehend von den Daten aus Abbildung 5.5. Diagramm (a) zeigt die Abweichung der Lösungen in der Kugelmitte des expliziten Algorithmus (Vierecke) und des impliziten Algorithmus (Dreiecke). Diagramm (b) zeigt die Abweichung von der Näherungslösung an einem Punkt der Kugeloberfläche. Wie im Text beschrieben verringert sich die Abweichung mit Fortschreiten des simulierten Zeitraumes. Die beobachteten Abweichungen liegen im Kugellinneren unter den Werten an der Kugeloberfläche.

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{a}{R^2} \cdot t\right)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2} \cdot \frac{r}{R}\right), \quad n = 1, 3, 5, \dots . \quad (5.7)$$

Dabei ist  $T_U$  die Temperatur des umgebenden Fluids,  $T_0$  die Anfangstemperatur der Kugel,  $R$  der Radius der Kugel und  $r$  der Abstand vom Mittelpunkt der Kugel ( $r \leq R$ ), an dem die Temperatur berechnet werden soll. Die Größe  $a$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) wird in der Literatur als *Temperaturleitfähigkeit* bezeichnet und ist definiert als (BEITZ & KÜTTNER, 1995):

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_s} . \quad (5.8)$$

Die Reihe (5.7) besteht nur aus ungeraden Elementen  $n$ . Obwohl sie aus unendlich vielen Glieder besteht, können brauchbare Näherungen abgeleitet werden, indem höhere Glieder vernachlässigt werden. Dies gilt in der Regel nicht für kleine Werte von  $t$ . Eine Näherung der unendlichen Reihe (5.7) findet man bei BEITZ UND KÜTTNER (1995):

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot C \cdot e^{\left(-\delta \cdot \frac{a}{R^2} \cdot t\right)} \cdot \frac{\sin\left(\delta \cdot \frac{r}{R}\right)}{\delta \cdot \frac{r}{R}} . \quad (5.9)$$

Diese Näherung gibt die Temperatur im Inneren der Kugel mit einem Fehler  $< 2\%$  wieder, wenn berücksichtigt wird, dass folgende Bedingung gilt:

$$\frac{a \cdot t}{R^2} = \frac{\lambda \cdot t}{\rho \cdot c_s \cdot R^2} \geq 0,18 . \quad (5.10)$$

Die Konstanten  $C$  und  $\delta$  in Gleichung (5.9) hängen von der Biot-Zahl ab und können Tabellen entnommen werden, z. B. aus (BEITZ & KÜTTNER, 1995). Die Biot-Zahl stellt eine dimensionslose Größe dar und ist nach WAGNER (1993) definiert als:

$$Bi = \frac{a \cdot R}{\lambda} . \quad (5.11)$$

Bei der Auswahl des Kugelmaterials wurden darauf geachtet, dass die Größen  $R$ ,  $\rho$ ,  $c_s$  und  $\lambda$  so dimensioniert sind, dass die Bedingung (5.10) innerhalb der Simulationszeit erfüllt wird. Setzt man für diese Größen die angenommenen Werte ein, so ergibt sich ein Zeitpunkt  $t = 458$  s ab dem die Bedingung (5.10) erfüllt wird, was innerhalb dem betrachteten Zeitraum von 1 800 s liegt.

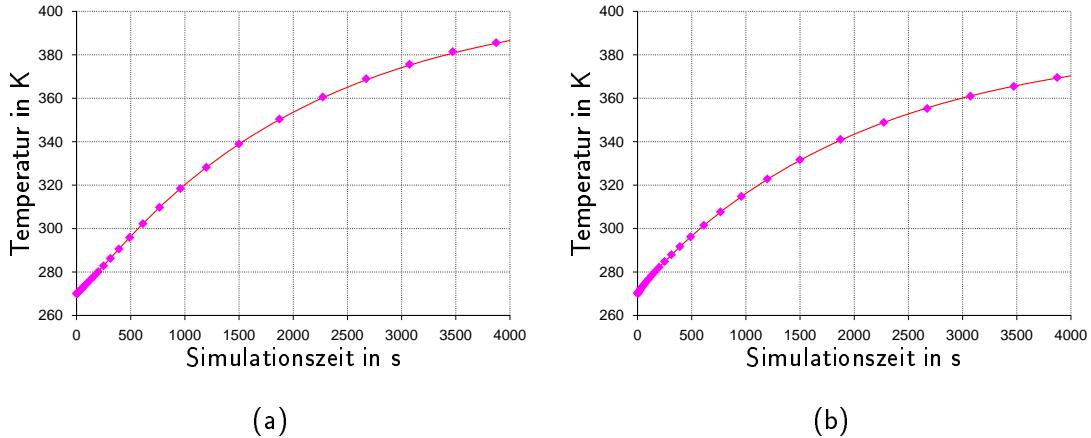
Abbildung 5.5 vergleicht den Temperaturverlauf in der Kugelmitte und am Kugelrand unter Verwendung der expliziten Zeitintegration mit einer Schrittweite von 0,1 s, der impliziten Zeitintegration mit einer Schrittweite von 100 s und der analytischen Lösung. Trotz des großen Schrittweitenunterschiedes zwischen explizitem und implizitem Algorithmus sind die Temperaturverläufe nahezu identisch. Die analytische Näherungslösung zeigt – wie oben angegeben – bei kleinen Simulationszeiten  $t$  noch deutliche Abweichungen vom tatsächlichen Temperaturverlauf. Ab dem Zeitpunkt  $t = 500$  s stimmen die analytischen und die numerischen Werte dann fast überein. Dies wird auch durch Abbildung 5.6 deutlich, in der die absoluten Abweichung der numerischen Lösung von der analytischen Lösung in Prozent angegeben ist. Mit steigender Simulationszeit  $t$  verringert sich die Abweichung der numerischen Lösung von der analytischen Näherungslösung (THIELE ET AL., 2002).

### 5.3.4 Bewertung der numerischen Verfahren

In der Regel ist die explizite Zeitintegration (sh. Abschnitt 2.5.1) durch den geringeren Rechenaufwand pro Zeitschritt vorteilhafter. Da der maximale stabile Zeitschritt bei diesem Verfahren durch das restriktive Stabilitätskriterium (2.46) eingeschränkt ist, geht dieser Vorteil bei langen simulierten Zeiträumen und einer daraus resultierenden großen Anzahl an Zeitschritten wieder verloren. Zur Lösung solcher Probleme muss dann der numerisch aufwändigere implizite Algorithmus (sh. Abschnitt 2.5.2) verwendet werden.

Aufgrund der Vielzahl der möglichen Modelle kann aber keine generelle Regel abgeleitet werden, ab welcher Zeitschrittzahl der implizite Algorithmus dem expliziten vorgezogen werden sollte. Es muss folglich immer der Einzelfall betrachtet werden. Da die implizite Zeitintegration einige freie Parameter wie z. B. den Zeitschritt besitzt, die das Verhalten des Algorithmus bei der Inversion der Systemmatrix beeinflussen, kommen zusätzliche Komponenten hinzu, deren Einstellungen die Iterationsdauer günstig oder ungünstig beeinflussen kann. Der Zusammenhang zwischen gesamter Iterationsdauer und gewähltem Zeitschritt bei der impliziten Zeitintegration ist, wie bereits beschrieben, daher nichtlinear. Die Wahl zwischen expliziter oder impliziter Zeitintegration bezüglich der kürzesten Gesamtiterationsdauer muss anhand einiger Probesimulationen mit dem betrachteten Modell entschieden werden.

Bei den im folgenden betrachteten Modellen scheidet allerdings der expliziten Algorithmus aus. Die Gitterschrittweiten der Modelle liegen aus Gründen der besseren Ortsauflösung und Konvergenz der Frequenzbereichslöser (siehe Unterkapitel 2.3) im Millimeter- oder sogar im Mikrometerbereich, so dass sich aufgrund des Kriteriums (2.46) nur maximale stabile Zeitschrittweiten für



**Abbildung 5.7:** Vergleich der Temperaturverläufe des impliziten Verfahrens mit konstantem und adaptivem Zeitschritt. Die durchgezogenen Linien geben den Temperaturverlauf in der Kugelmitte (a) und am Kugelrand (b) wieder. Als Zeitschritt wurde 1 s gewählt. Die Punkte in beiden Bildern geben die Temperaturwerte wieder, die mit der adaptiven Zeitschrittsteuerung ermittelt wurden. Als Startzeitschritt wurde ebenfalls 1 s gewählt. Die maximale Zeitschrittunahme wurde auf 25 % festgesetzt, der maximal erlaubte Zeitschritt auf 400 s. Mit diesen Einstellungen endete die Simulation nach 35 Schritten.

den expliziten Algorithmus im unteren Millisekundenbereich ergeben. Diese führen aufgrund der betrachteten langen Simulationszeitintervalle von bis zu 1800 s oder mehr zu einer zu großen Anzahl an Iterationsschritten und damit Gesamtiterationsdauer, die dann deutlich über dem Zeitbedarf des impliziten Algorithmus mit einer größeren Zeitschrittweite liegen.

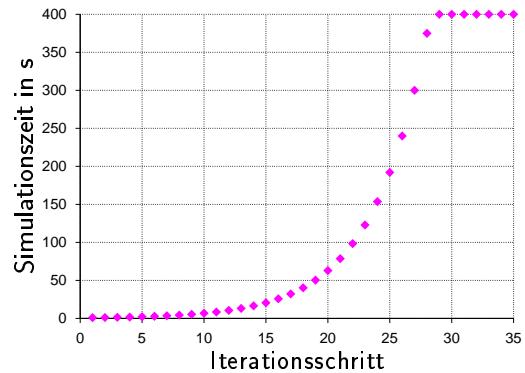
## 5.4 Test der adaptiven Zeitschrittsteuerung

Das Ziel einer adaptiven Zeitschrittsteuerung ist eine Verringerung des Rechenaufwandes und damit ein Zeitgewinn durch Beschleunigung der numerischen Lösung bei Problemen mit Wärmequellen, die über eine konstante Leistung verfügen. Dabei muss sichergestellt werden, dass die Zunahme des Zeitschrittes nicht zu numerischen Instabilitäten und Abweichungen von Lösungen mit konstantem Zeitschritt auftreten. Aus diesem Grund ist darauf zu achten, dass die in Gleichung (2.51) angegebenen Steuerungsparameter  $k$  und  $t_{\max}$  so gesetzt werden, dass Abweichungen vermieden werden.

Als Testbeispiel wurde wie im vorherigen Abschnitt eine Stahlkugel mit einem Radius von 0,1 m in einem unendlich großen Wärmebad mit einem fluiden Medium von 270 K betrachtet (sh. Abbildung 5.3). Die Anfangstemperatur der Kugel wurde in diesen Beispielen gleich der Temperatur des Wärmebades mit 270 K gesetzt, so dass sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  s das gesamte Rechenvolumen auf der gleichen konstanten Temperatur befand.

Als Kugelmaterial wurde wiederum V2A-Stahl mit einer Dichte  $\rho$  von 8 000 kg/m<sup>3</sup>, einer spezifischen Wärmekapazität  $c_s$  von 477 J/(kg · K) und einer Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  von 15 W/(m · K) angenommen. Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  wurde in diesen Beispielen auf 50 W/(K · m<sup>2</sup>) reduziert, um so die Auskühlung der Kugel zu verlangsamen.

**Abbildung 5.8:** Zunahme des Zeitschrittes durch die adaptiven Zeitschrittsteuerung. Ausgehend von einem Anfangszeitschritt von 1 s wird der Zeitschritt anhand der maximalen Temperaturerhöhung im Modell angepasst. Die maximale Zunahme pro Iterationsschritt ist auf 25 % begrenzt. Nach 29 Iterationsschritten ist der maximal zulässige Zeitschritt von 400 s erreicht. Nach 35 Schritten ist die Gesamtsimulationszeit erreicht und die Iteration wird beendet.



Als Energiequelle wurden verschiedene konstante Leistungsdichten gleichmäßig im Kugelvolumen verteilt. Dabei wurde jeweils die deponierte Gesamtleistung als Eingabeparameter verwendet. Die zugehörige Leistungsdichte in  $\text{W}/\text{m}^3$  ergibt sich dann durch Division der Gesamtleistung durch das Kugelvolumen.

Die numerischen Testreihen der adaptiven Zeitschrittsteuerung sollen in den folgenden Abschnitten einige Dinge zeigen. Zunächst wird geprüft, ob sich bei Anwendung dieser Zeitschrittsteuerung Abweichungen in den Temperaturverläufen im Vergleich zu Simulationen mit konstanten Zeitschritten ergeben. Danach erfolgt eine Betrachtung von Problemen mit gepulsten Leistungen, wie z. B. das gepulste Hochfrequenzfeld bei der Magnetresonanztomographie. Dabei wird zum einen die Fragestellung beantwortet, ob sich eine gepulste Leistung in ein Problem mit konstanter Ersatzleistung umwandeln lässt, um nicht mehr auf eine große Anzahl von Zeitschritten angewiesen zu sein, damit jedes An- und Abschalten der Quelle berücksichtigt wird. Zum anderen wird untersucht, ob dieses Problem dann wiederum mit einer adaptiven Zeitschrittsteuerung gelöst werden kann, was automatisch bewiesen ist, wenn im ersten Schritt gezeigt werden kann, dass eine adaptive Zeitschrittweitensteuerung bei konstanter Leistung keine Abweichungen und Instabilitäten erzeugt.

#### 5.4.1 Vergleich zwischen festem und adaptivem Zeitschritt

Um zu überprüfen, ob eine adaptive Zeitschrittweitensteuerung zu Abweichungen und Instabilitäten bei der Berechnung von Temperaturverteilungen im Vergleich zu numerischen Simulationen mit festen Zeitschrittweiten führt, wurde in der Kugel eine konstante Leistung von 1 000 W deponiert und die Erwärmung der Kugel jeweils mit dem expliziten und dem impliziten Algorithmus mit einer konstanter Zeitschrittweite von 1 s mit insgesamt jeweils 4 000 Iterationsschritten für einen Zeitraum von 4 000 s berechnet. In Abschnitt 5.3.3 wurde bereits gezeigt, dass die Abweichung der Ergebnisse dieser Algorithmen von einer analytischen Näherungslösung bei diesen Einstellungen schon nach kurzen simulierten Zeiträumen nur gering ist (vgl. Abbildungen 5.5 und 5.6).

Der Temperaturverlauf wurde bei diesen Simulationen direkt im Mittelpunkt der Kugel und an einem Punkt der Kugeloberfläche aufgezeichnet. Die Temperaturverläufe des expliziten und des impliziten Algorithmus sind in Abbildung 5.7 als durchgezogene Linie wiedergegeben. Aufgrund der guten Übereinstimmung der Lösungen beider Algorithmen liegen die beiden Temperaturverläufe übereinander und sind im Diagramm nicht voneinander unterscheidbar.

Als Parameter für die adaptive Zeitschrittsteuerung wurde als Startschrittweite  $\Delta t_0 = 1$  s gewählt. Der Faktor  $k$  wurde auf 1,25 gesetzt. Als maximaler Zeitschritt  $\Delta t_{\max}$  wurde ein Wert von 400 s vorgegeben. Die Iteration wurde nach dem Schritt abgebrochen, bei dem die vorgegebene Simulationsdauer von 4 000 s erreicht wurde. Abbildung 5.8 zeigt den Anstieg des Zeitschrittes während der Iteration. Mit diesen Einstellungen wurde das Abbruchkriterium bereits nach 35 Iterationsschritten erfüllt. Die maximal zulässige Zeitschrittweite von 400 s wurde nach 29 Iterationsschritten erreicht.

Abbildung 5.7 zeigt neben den Lösungen mit fester Zeitschrittweite die Temperaturwerte der adaptiven Zeitschrittsteuerung als einzelne Rauten. Die gute Übereinstimmung der Temperaturverläufe bestätigt die Vermutung, dass die adaptive Zeitschrittsteuerung aus Unterkapitel 2.5.3 zur Rechenzeitverkürzung geeignet ist. Der zeitliche Vorteil der adaptiven Zeitschrittsteuerung wird aus Tabelle 5.6 deutlich. Die notwendige Rechenzeit liegt bei diesem Beispiel sogar unter der Rechenzeit des schnellen expliziten Algorithmus (vgl. hierzu auch Tabelle 5.5).

Im Rahmen dieser numerischen Testreihen wurden die Parameter  $k$  und  $t_{\max}$  sehr groß gewählt. Es ist zwar nicht ausgeschlossen, dass selbst noch größere Werte zu stabilen Lösungen führen, für die folgenden numerischen Studien geben diese Parameter aus Erwägungen der Rechengenauigkeit und Stabilität aber die Obergrenze vor.

#### 5.4.2 Ersatz einer gepulsten Leistung durch eine mittlere Dauerleistung

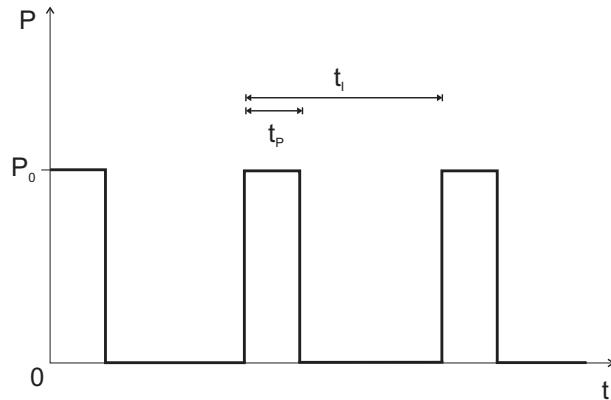
Um zu beantworten, ob sich eine gepulste Leistung in eine äquivalente Dauerleistung umwandeln lässt wurde wiederum das Kugelmodell nach Abbildung 5.3 verwendet. Dabei wird über einen Zeitraum von 10 000 s die homogene Leistung von 100 W in der Kugel deponiert. Die Erwärmung der Kugel wird wiederum in der Mitte und am Rand aufgezeichnet. Die Leistung von 100 W stellt dabei die gemittelte Dauerleistung  $\bar{P}$  dar. Dadurch wird pro Sekunde eine Energie von 100 J in der Kugel abgegeben. Wird nach Abbildung 5.9 eine gepulste Leistung mit einer Pulsdauer  $t_p$  verwendet, so ist der Wert der Pulsleistung  $P_0$  so einzustellen, dass die deponierte Energie  $W_i$  pro Pulsintervall  $t_i$  der deponierten Energie  $\bar{W}$  bei gemittelter Dauerleistung  $\bar{P}$  entspricht:

$$\bar{W} = \int_0^{t_i} \bar{P} \cdot dt = \int_0^{t_p} P_0 \cdot dt = W_i . \quad (5.12)$$

Algorithmus	explizit	implizit	implizit
Zeitschritt	fest	fest	adaptiv
Schrittweite	1 s	1 s	1 s bis 400 s
Iterationsschritte	4 000	4 000	35
Zeitbedarf	367 s	1 040 s	153 s

**Tabelle 5.6:** Vergleich der Rechenzeiten des expliziten und impliziten Algorithmus mit einer festen Zeitschrittweite von 1 s mit dem impliziten Algorithmus mit adaptiver Zeitschrittsteuerung mit variablen Zeitschritten von 1 s bis 400 s. Bei allen drei Verfahren wurde ein Gesamtzeitraum von 4 000 s simuliert. Die adaptive Zeitschrittsteuerung ist in diesem Fall selbst dem expliziten Algorithmus überlegen und zeigt in ihrem Temperaturverlauf eine sehr gute Übereinstimmung mit den Lösungen mit konstanten Zeitschritten, wie Abbildung 5.7 zeigt.

**Abbildung 5.9:** Zeitlicher Verlauf einer gepulsten Leistung. Die Energiequelle wird in dieser Darstellung immer an- und ausgeschaltet. Das Verhältnis zwischen Pulszeitdauer  $t_p$  und Intervallzeitdauer  $t_i$  wird benötigt, um die mittlere Leistung einer Ersatzenergiequelle zu berechnen, von der angenommen wird, dass sie konstant angeschaltet ist. Dadurch kann in guter Näherung auf den zeitlichen Ablauf der gepulsten Leistung verzichtet werden, was den rechnerischen Aufwand reduziert.

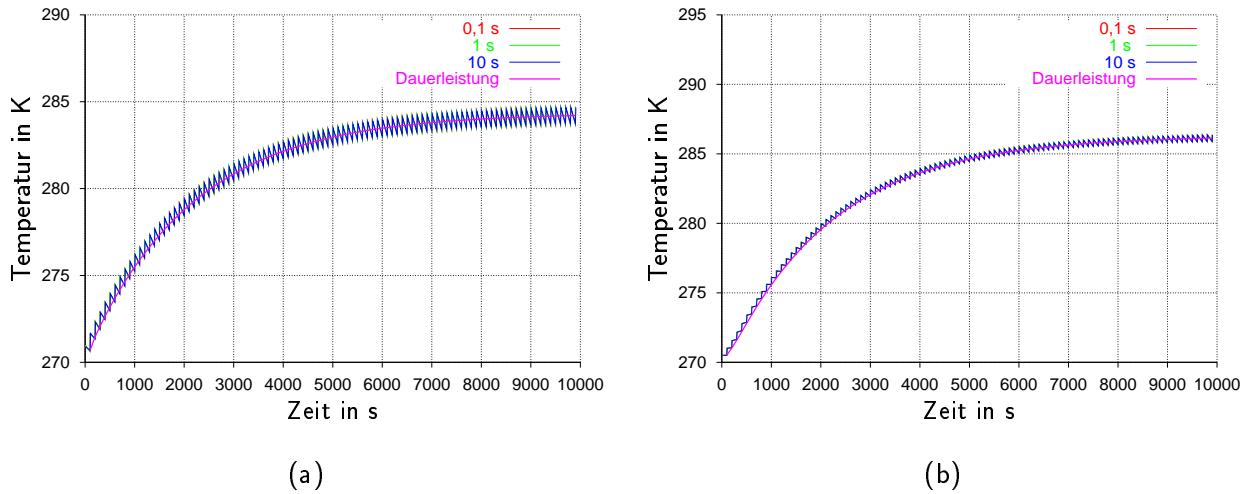


Bei einer Pulsdauer von 10 s ergibt sich eine energieäquivalente Pulsleistung von 1 000 W, bei 1 s ergeben sich dann 10 000 W und bei 0,1 s dann 100 000 W.

Abbildung 5.10 zeigt die Temperaturverläufe im Inneren der Kugel und am Kugelrand. Bei der gepulsten Leistung ergibt sich ein sägezahnartiger Anstieg der Temperatur bis zu einem stationären Zustand bei dem die Temperaturwerte in der Größenordnung von einigen Kelvin um einen Mittelwert schwanken. Die Schwankungen am Rand sind dabei größer als die in der Kugelmitte, da hier ein größerer Energieübertrag an die kühлere Umgebung stattfindet. Die Ergebnisse bei den verschiedenen Pulsdauern sind im Diagramm nicht voneinander zu unterscheiden. Die Temperaturanstiege, die sich durch die Dauerleistung ergeben zeigen zu Beginn der Simulation Temperaturwerte, die den unteren Temperaturen des sägezahnartigen Anstiegs entsprechen. Bei Erreichen des stationären Zustandes liegen die Temperaturwerte der Dauerleistung in der Mitte der Temperaturschwankungen der Pulsleistung.

Eine Vereinfachung der Pulsform zu einer Dauerleistung führt zu einer starken Reduktion des numerischen Aufwandes. Wie in Abbildung 5.10 zu sehen ist, kann mit der Annahme einer Dauerleistung im stationären Zustand die mittlere Temperatur an beliebigen Punkten des Rechenvolumens angegeben werden. Eine Einschränkung ist allerdings bei den Temperaturschwankungen zu sehen. Diese können mit einer Ersatzdauerleistung nicht erfasst werden. In den Fällen, in denen die Temperaturschwankungen klein sind, ist dies aber nicht von Bedeutung. Dies gilt auch, wenn es nicht unbedingt notwendig ist, die Absolutwerte der Temperaturschwankungen zu ermitteln.

Ausgehend von den Ergebnissen, dass eine mittlere Dauerleistung als Ersatz für eine gepulste Quelle verwendet werden kann, wenn es um die Berechnung des Verlaufs der mittleren Temperatur geht, lassen sich weitere Schlüsse ziehen. Aufgrund der gewonnenen Erkenntnisse aus den Untersuchungen zur adaptiven Zeitschrittsteuerung kann geschlossen werden, dass als weitere Vereinfachung des numerischen Aufwandes auch bei Berechnungen der Temperaturverläufe bei einer Dauerleistung die adaptive Zeitschrittsteuerung verwendet werden kann. Die Ergebnisse in Abbildung 5.7 haben dies bereits gezeigt und können ohne Einschränkungen auf diesen Anwendungsfällen übertragen werden.



**Abbildung 5.10:** Vergleich zwischen den Temperaturverläufen bei gepulster Leistung mit unterschiedlichen Pulsdauern bei konstanter mittlerer Leistung am Kugelrand (a) und in der Mitte der Kugel (b). Die einzelnen Temperaturverläufe bei verschiedenen Pulsdauern sind nicht voneinander zu unterscheiden. Die Simulation ergibt einen sägezahnartigen Verlauf der Temperaturanstiege. Im Verlauf der Simulation wird ein stationärer Zustand erreicht, wenn die Energiedeposition während der Pulszeit gleich dem Engerieabtransport an die Umgebung während der Pulspause ist. Die Temperaturwerte schwanken dann in der Größenordnung von einigen Kelvin um eine mittlere Temperatur. Der Temperaturverlauf der gemittelten Dauerleistung (dicke violette Linie) liegt zu Beginn der Simulation bei den unteren Temperaturwerten des sägezahnförmigen Anstieges und bei Erreichen des stationären Zustandes in der Mitte der Temperaturschwankungen. Die Leistungsmittelung gibt bei Erreichen des stationären Zustandes dann die mittlere Temperatur an.

## 5.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die durchgef hrten numerischen Voruntersuchungen als Grundlage für die numerischen Studien in den folgenden Kapiteln vorgestellt. Zunächst wurde auf das Konvergenzverhalten der Lösealgorithmen zur Lösung der Maxwell-Gleichungen im Frequenzbereich eingegangen. Die Vielzahl der zur Verfügung stehenden Parameter erfordert für jeden Anwendungsfall spezielle Voruntersuchungen, um die geeigneten Parameterkombinationen zur Lösung des Problems zu ermitteln. Im einzelnen wurde zunächst auf die Auswahl der Systemgleichung und des Lösealgorithmus eingegangen. Darauf folgte eine Diskussion der möglichen Systemmatrixvorkonditionierungen und der Probleme, die sich bei der Annahme offener Randbedingungen ergeben können. Im weiteren wurde auf die interne Zahlendarstellung und die Vor- und Nachteile von Gitterverfeinerungen eingegangen. Ein weiteres Problem stellt sich bei der Kontrolle der physikalischen Korrektheit der Lösungen, welches intensiv diskutiert wurde. Die Gegenüberstellung verschiedener Konvergenzgeschwindigkeiten einzelner Lösealgorithmen, sowie des dazu nötigen Zeitbedarfs auf verschiedenen Rechnersystemen schlossen diesen Teil der Voruntersuchungen ab.

Aufgrund der Betrachtung von Modellen mit verlustbehafteten Körpergeweben bei hohen Frequenzen fiel die Wahl der Systemgleichung auf die Curl-Curl-Eigenwertgleichung. Die Vorteile numerisch aufwändigerer Darstellungen dieser Gleichung z. B. in Form einer Helmholtz-

Gleichung gehen bei verlustbehafteten Materialien im Rechenvolumen wieder verloren, so dass diese alternativen Gleichungstypen von vorneherein ausscheiden.

Es zeigte sich, dass das Jacobi-vorkonditionierte PSBCGR-Verfahren bei doppeltgenauer Zahlen-darstellung allen anderen Verfahren bezüglich Konvergenzgeschwindigkeit, Speicherbedarf und Rechengeschwindigkeit überlegen ist. Die Qualität der numerischen Lösung entspricht derjenigen, die mit dem numerisch aufwändigeren PQMR-Verfahren erreicht werden kann. Daher ist das PSBCGR-Verfahren vorzuziehen. Zusätzliche Vorkonditionierungen sind zwar möglich, ergaben aber keine zusätzlichen Vorteile bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit der untersuchten Verfahren.

Gitterverfeinerungen sind auf der einen Seite an Übergängen zwischen Materialien mit sehr unterschiedlichen dielektrischen Eigenschaften von Vorteil, bewirken aber gleichzeitig eine Erhöhung der Konditionszahl der Systemmatrix und führen dadurch wiederum zu einer geringen Konvergenzgeschwindigkeit oder im Extremfall sogar zu einer Divergenz des Lösealgorithmus. Daher sind Gitterverfeinerungen nur mit großer Sorgfalt anzuwenden, da die Vorteile unter Umständen schnell von Nachteilen aufgewogen werden.

In einem weiteren Unterkapitel wurden die explizite und implizite Zeitintegration bei der Biowärmeleitungsgleichung miteinander verglichen. Dabei ging es zunächst um einen prinzipiellen Vergleich beider Verfahren bezüglich Rechenzeitbedarf und Übereinstimmung der Lösungen. Da für das gewählte einfache Kugelmodell eine analytische Näherungslösung existiert, konnten die Ergebnisse der verschiedenen Iterationsalgorithmen direkt bewertet werden.

Die Ergebnisse zeigten bei beiden Algorithmen eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Das explizite Verfahren ist dem impliziten Verfahren nur bei kurzen Simulationszeiträumen mit wenigen Iterationsschritten überlegen. Insbesondere das restriktive Stabilitätskriterium für den maximalen stabilen Zeitschritt schränkt den Anwendungsbereich des expliziten Algorithmus stark ein, da bei Gitterschrittweiten im Mikrometerbereich nur noch Zeitschritte im Millisekundenbereich möglich sind, was zu hohen Rechenzeiten bei langen Simulationszeiträumen führt. Die Entscheidung zugunsten des einen oder anderen Verfahrens ist aber immer im Einzelfall neu zu treffen.

Abschließend wurde das Verfahren zur adaptiven Zeitschrittsteuerung getestet. Die implizite Zeitintegration des thermodynamischen Lösealgorithmus erlaubt die Wahl eines beliebigen Zeitschrittes. Bei Wärmequellen mit konstanter Leistung kann daher der Zeitschritt mit fortschreitender Simulationsdauer sukzessive vergrößert werden, ohne den numerischen Fehler in der Temperaturverteilung wesentlich zu vergrößern.

Die Testreihen in diesem Unterkapitel haben gezeigt, dass eine adaptive Zeitschrittsteuerung selbst bei großzügig gewählten Werten zu keinen Abweichungen der Temperaturverläufe im Vergleich zu Lösungen mit festen Zeitschritten führt. Stattdessen ergaben sich wesentliche Verkürzungen der notwendigen Iterationsschritte und damit der benötigten Rechenzeit.

Es konnte weiterhin gezeigt werden, dass sich gepulste Vorgänge näherungsweise durch eine mittlere Dauerleistung beschreiben lassen, wenn die Kenntnis des mittleren Temperaturverlaufes im Rechenvolumen ausreicht. In diesen Fällen betrifft dies in erster Linie die Temperaturschwankungen im stationären Zustand, deren Kenntnis nicht immer notwendig ist, insbesondere, wenn die Schwankungen klein sind. Weitere Vereinfachungen sind dann durch die zusätzliche Anwendung eines adaptiven Zeitschrittes bei Annahme einer mittleren Dauerleistung möglich, was zusätzlich die Rechenzeit verkürzt. Aufwändige zeitliche Abläufe lassen sich so in den meisten Fällen stark vereinfachen, ohne die Aussagekraft des numerischen Modells wesentlich zu reduzieren.

---

# Kapitel 6

## Magnetische Hochfrequenzfelder bei der Magnetresonanztomographie

---

### 6.1 Einführung und Motivation

#### 6.1.1 Kernspinresonanz und Magnetresonanztomographie

Die Magnetresonanztomographie hat sich im Laufe der Jahre in der medizinischen Diagnostik zu einem unverzichtbaren bildgebenden Verfahren entwickelt, welches inzwischen in der Lage ist, hochauflöste drei- oder vierdimensionale Bilddatensätze (Raum und Zeit) des menschlichen Körpers zu erzeugen. Dabei wird das Phänomen der Kernspinresonanz genutzt, welches durch die fundamentale Eigenschaft des Spins der Nukleonen des Atomkerns verursacht wird. In der klassischen Darstellung wird der Kernspin oft mit dem intrinsischen Drehimpuls eines klassischen Kreisels verglichen.

Die Spins aller Nukleonen eines Atomkerns koppeln zu einem gesamten Kernspin. Verschwindet der Kernspin eines Atoms nicht, so besitzt dieser Atomkern ein messbares magnetisches Dipolmoment. Betrachtet man makroskopisch eine große Anzahl an Atomen, z. B. einen menschlichen Körper, so besitzt dieser Körper trotz der vorhandenen Kernspins seiner Atome makroskopisch keine nach außen messbare Magnetisierung, da sich durch die statistische Verteilung der einzelnen Dipolmomente im Raum die magnetischen Momente der Atomkerne gegenseitig aufheben.

Bringt man den Körper in ein starkes statisches Magnetfeld, so richtet sich je nach Temperatur ein gewisser Anteil der einzelnen Kernspins entlang der Richtung des äußeren statischen Magnetfelds aus. Dadurch entsteht eine messbare makroskopische Magnetisierung, die bereits mit den Methoden der klassischen Physik beschrieben werden kann. Durch Einstrahlen eines hochfrequenten transversalen elektromagnetischen Pulses (HF-Puls) kann die makroskopische Magnetisierung aus ihrer Ruhelage ausgelenkt werden und fängt an, um das statische Magnetfeld zu präzedieren.

Nach dem HF-Puls induziert die rotierende Magnetisierung in einer transversalen Messspule ein HF-Signal, welches mit der Zeit aufgrund von Relaxationsphänomenen der Kernspins mit den benachbarten Atomen (Spin-Gitter-Relaxation) oder anderen Kernspins (Spin-Spin-Relaxation)

zerfällt. Um eine Auslenkung der makroskopischen Magnetisierung zu erreichen, muss die Frequenz des eingestrahlten HF-Pulses eine Resonanzbedingung erfüllen. Die Präzessionswinkelgeschwindigkeit  $\omega_l$  der Magnetisierung ist abhängig von der Stärke des äußeren statischen Feldes und wird durch die *Larmor-Frequenz*  $f_l$  beschrieben. Die Larmorfrequenz ist mit dem äußeren statischen Magnetfeld  $B_0$  über das gyromagnetische Verhältnis  $\gamma$  des Kerns verknüpft:

$$\omega_l = 2\pi \cdot f_l = \gamma \cdot B_0 . \quad (6.1)$$

Für Protonen beträgt das gyromagnetische Verhältnis  $\gamma = 2\pi \cdot 42,6 \text{ MHz/T}$ . Bei einer statischen Magnetfeldstärke von 1 T muss daher mit einer Hochfrequenz von 42,6 MHz eingestrahlt werden, um die makroskopische Magnetisierung auszulenken. Das gyromagnetische Verhältnis ist eine Eigenschaft des Atomkerns. Sie ist für jedes Atom verschieden. Da der Mensch aber zu ca. 70 % aus Wasser besteht, ist der dominierende Effekt die Resonanz der Wasserstoffkerne im Gewebe.

Der Grad der Auslenkung der Magnetisierung aus ihrer Ruhelage ist abhängig von der Dauer der Hochfrequenzeinstrahlung  $t_p$  und wird als *Flipwinkel*  $\alpha$  bezeichnet. Mit Hilfe des gyromagnetischen Verhältnis kann berechnet werden, welche Stärke  $B_1$  der eingestrahlte transversale HF-Puls für einen gewünschten Flipwinkel  $\alpha$  haben muss:

$$B_1 = \frac{\alpha}{\gamma \cdot t_p} . \quad (6.2)$$

Durch die HF-Pulse wird die Magnetisierung im Körper ausgelenkt und mit Hilfe von Empfangsspulen der Zerfall der Quermagnetisierung gemessen. Dabei besitzt der Zerfall für jedes Gewebe typische Eigenschaften, durch die die Art des Gewebes klassifiziert werden kann. Wird nun mit Hilfe von zusätzlichen Gradientenspulen das statische Magnetfeld etwas im Raum verstimmt, so ist eine ortsaufgelöste Akquisition der einzelnen Zerfallssignale und damit eine Bildgebung möglich.

Grundlegende Darstellungen über die physikalischen Hintergründe der Kernspinresonanz finden sich bei HAKEN UND WOLF (1996) und BETHGE (1996). Weiterführende Darstellungen, die die Funktionsweise und Bilderzeugung bei der Magnetresonanztomographie, sowie den Aufbau von Pulssequenzen beschreiben finden sich bei DÖSSEL (2000), MORNEBURG (1995) und CHEN UND HOULT (1989)

### 6.1.2 Erwärmung von Körpergewebe und Implantaten

Die statischen Feldstärken von klinischen MR-Tomographen erstrecken sich heutzutage von 0,2 T bis über 4,7 T. Die notwendigen Frequenzen der HF-Pulse zur Bildgebung liegen dadurch im Bereich einiger Megahertz bis einiger hundert Megahertz. In diesem Frequenzbereich ist, wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben, eine Stimulation von Muskel- oder Nervenzellen im menschlichen Körper nicht mehr möglich. Stattdessen überwiegt die Erwärmung von Körpergewebe durch die Deposition von Feldenergie aufgrund Joulescher Verluste im Gewebe (vgl. dazu Abschnitt 4.2.3).

Neben der generellen Belastung des gesamten Organismus durch die Erwärmung von Gewebe ist die Erwärmung von metallischen Implantaten von besonderem Interesse. Durch die gute Leitfähigkeit ist es möglich, dass sich durch die induzierten Ströme lokale Stellen mit hohen Stromdichten an den Spitzen und Kanten der Implantate bilden. An diesen Stellen können dann hohe Temperaturen entstehen, die das benachbarte Körpergewebe irreversibel schädigen können.

Solche Erwärmungen können selbst dann entstehen, wenn die grundsätzliche thermische Belastung durch das Hochfrequenzfeld für den gesamten Körper noch in einem zulässigen Rahmen liegt (vgl. Abschnitt 4.3.2). Da eine generelle Vorhersage und Abschätzung lokaler thermischer Schäden durch Implantate bisher nicht möglich ist, stellt ein medizinisches Implantat im Körper eines Patienten bis heute eine Kontraindikation für eine Untersuchung im MR-Tomographen dar, obwohl es bereits Vermutungen und klinische Erfahrungen gibt, dass es für einige Patienten möglich ist, sich gefahrlos einer MR-Untersuchung zu unterziehen. Dies wird später in Abschnitt 6.2.8 diskutiert.

Da aufgrund der zahlreichen physiologischen und technischen Parameter eine einfache Ableitung von Sicherheitsregeln und Ausschlusskriterien für Implantateträger nicht möglich ist, beschäftigen sich Forschergruppen in experimentellen *in vivo* und *in vitro* sowie in numerischen Studien mit dieser Thematik mit teilweise gegensätzlichen Ergebnissen. Im nächsten Abschnitt werden einige dieser Arbeiten vorgestellt.

### 6.1.3 Ergebnisse anderer Forschungsarbeiten

In der Literatur finden sich zahlreiche Studien zur Erwärmungsproblematik von medizinischen Implantaten im menschlichen Körper während MR-Untersuchungen. Am meisten wird über Experimente mit salzwassergefüllten Phantomen berichtet, die anstelle eines Probanden in unterschiedlichen MR-Szenarien untersucht wurden. Weiterhin lassen sich einige Studien finden, in denen mit Patienten mit Implantaten MR-Aufnahmen gemacht wurden. Seltener finden sich numerische Studien mit hochauflösten Körpermodellen oder gar zusätzlich mit Implantaten.

Aufgrund der Vielzahl an experimentellen Parametern ergeben die Studien scheinbar gegensätzliche Ergebnisse. Einige Autoren berichten über erhebliche Temperaturzunahmen insbesondere an implantierten Elektroden, wohingegen andere Studien unter scheinbar ähnlichen Versuchsbedingungen keinen Nachweis einer schädlichen Temperaturzunahme erbringen können. Aus diesem Grund lassen sich anhand der vorhandenen Ergebnisse aus der Literatur keine generellen Schlüsse ziehen, unter welchen Bedingungen eine MR-Untersuchung für einen Patienten mit Implantat gefährlich werden könnte und wann nicht. Dies liegt auch darin begründet, dass sich die Ergebnisse von Phantomstudien nur bedingt auf die menschliche Anatomie und Physiologie übertragen lassen.

An der Heidelberger Kopfklinik entstand im Jahr 1999 eine Arbeit, bei der mit einem kugelförmigen salzwassergefüllten Plexiglasphantom in drei verschiedenen MR-Tomographen die Erwärmung einer Tiefenhirnstimulationselektrode zur Behandlung der Parkinsonkrankheit mit Hilfe einer Infrarot-Wärmebildkamera gemessen wurde. Die MR-Tomographen hatten Grundaufwandsstärken von 0,2 T bis 1,5 T. Die Stimulationselektrode wurde in der Mitte des Salzwasserphantoms platziert und außerhalb des Phantoms mit einem Hirnschrittmacher verbunden. Während der MR-Sequenz wurde die Erwärmung und die in den Kabeln induzierte Spannung beobachtet, die im Bereich einiger Volt lagen. Eine Erwärmung der Elektrode konnte aber in keinem Experiment nachgewiesen werden. Danach wurden 38 Patienten mit implantierten Tiefenhirnstimulationselektroden im MR-Tomographen untersucht, da in der Phantomstudie keine Erwärmungen nachgewiesen werden konnten. Während und nach der Bildaufnahme wurden bei keinem der Patienten gesundheitliche Veränderungen oder Auffälligkeiten beobachtet, so dass aus den Ergebnissen geschlossen wurde, dass die MR-Tomographie mit dem verwendeten Tiefenhirnstimulationssystem unter den gewählten MR-Parametern gefahrlos möglich ist (TRONNIER ET AL., 1999B).

Im Gegensatz zu dieser Studie wurden von LUECHINGER ET AL. (1999) Erwärmungen an verschiedenen Herzschrittmacherelektroden in einer Studie mit einem salzwassergefüllten Plexiglasphantom in einem MR-Tomographen bei 1,5 T nachgewiesen. Die Erwärmungen waren so groß, dass bei Patienten mit einer irreversiblen Schädigung des Gewebes gerechnet werden müsste. Es zeigte sich, dass die Erwärmung vom Modell der Schrittmacherelektrode und ihrer Positionierung im Phantom abhängen. Eine Position in den Randbereichen des Phantoms erwies sich in jedem Fall als ungünstiger. Für die Temperaturmessung wurde ein faseroptisches Messsystem verwendet. Darüber hinaus wurde in einer tierexperimentellen Studie die Erwärmung an Herzschrittmacherelektroden in Schweinen untersucht. Die Messungen mit faseroptischen Sensoren und Thermoelementen ergaben auch in diesem Fall während einer Standardbildgebungssequenz Erwärmungen von über 30 °C. Eine Untersuchung des Schweineherzens nach der Bildgebung konnte aber keine irreversiblen Schädigungen von Herzmuskelgewebe in den Schweineherzen nachweisen (LUECHINGER, 2002).

Neben diesen Studien existieren weitere Arbeiten, die mitunter zu recht unterschiedlichen Ergebnissen bezüglich der Erwärmung von Implantaten und der damit verbundenen Interpretationen der Gefährdung für die Patienten kommen (CHOU & CHAN, 1997; GREBMEIER ET AL., 1991; YEUNG ET AL., 2002; SOMMER ET AL., 2000; ZHANG ET AL., 1993; NYENHUIS ET AL., 1999; REZAI ET AL., 2002).

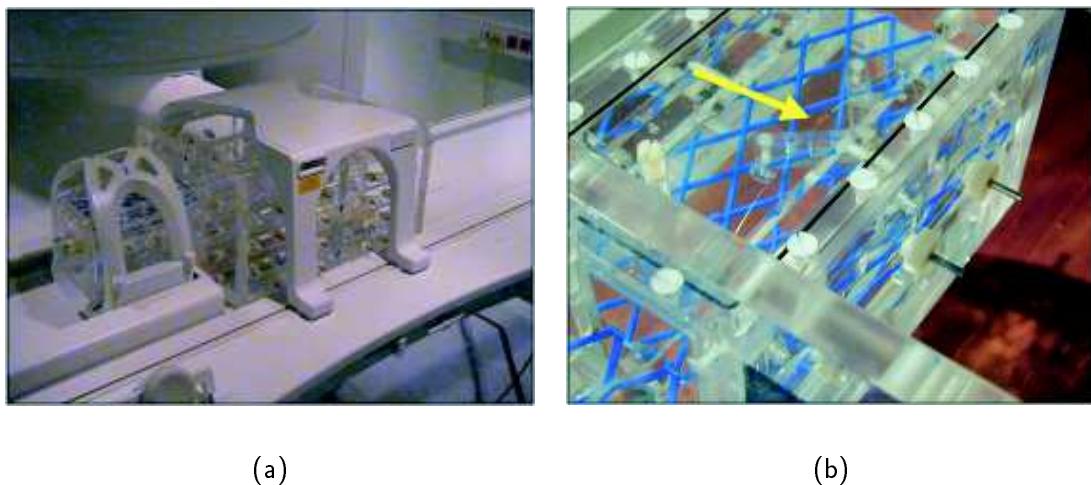
Numerische Studien werden bei der MR-Tomographie vor allen Dingen bei Entwurf und Entwicklung neuer Hochfrequenzspulen verwendet, um die resultierende Feldverteilung und -homogenität zu berechnen. Seltener finden sich Studien bei denen mit Modellen des menschlichen Körpers die absorbierte Leistung im Gewebe abgeschätzt wird, um einen Hinweis über die spezifische Absorptionsrate einer Spulenbauart zu erhalten.

Eine dieser Studien von ŠIMUNIĆ ET AL. (1996B) beschreibt die Leistungsabsorption in einem einfachen Finite-Elemente-Modell eines Kopfes in einem MR-Tomographen (63,9 MHz). Mit Hilfe des Kopfmodells wurden genauere Aussagen über lokale Stellen mit höherer Energiedeposition ermittelt. Bei der Untersuchung fiel vor allen Dingen auf, dass in der cerebrospinalen Flüssigkeit, den Blutgefäßen und der Muskulatur lokale Maxima der spezifischen Absorptionsrate (*SAR*) beobachtet werden konnten, die aber alle unter den zulässigen Grenzwerten lagen. Eine einfache Abschätzung der Erwärmung identisch zu Gleichung (4.8) ergab keine unzulässigen Erwärmungen.

Ähnlich zu dieser Studie finden sich 2D-*SAR*-Berechnungen für eine größere Auswahl von „Birdcage“-MR-Spulen mit einem 2D-Kopfmodell bei JIN UND CHEN (1997) mit ähnlichen Größenordnungen für die spezifische Absorptionsrate, ebenso bei IBRAHIM ET AL. (2001) und COLLINS UND SMITH (2001).

#### **6.1.4 Inhalt der weiteren Unterkapitel**

Im nächsten Unterkapitel werden zunächst eigene experimentelle Untersuchungen in Anlehnung an die Experimente aus der Literatur vorgestellt, mit denen die Ergebnisse anderer Autoren bestätigt werden konnten. Ausgehend von der experimentellen Studie werden danach numerische Modelle von salzwassergefüllten Plexiglasphantomen vorgestellt. Anhand einer analytischen Betrachtung werden Näherungslösungen für die Verteilung des elektrischen Feldes in einem quaderförmigen Salzwasserphantom abgeleitet und mit den Ergebnissen einer numerischen Studie verglichen. Mit den resultierenden Feldverteilungen wird gezeigt, wie die Energiedeposition im



**Abbildung 6.1:** Bild (a) zeigt den experimentellen Aufbau bei der klinischen *in vitro* Phantomstudie mit einem Oberkörperphantom im MR-Tomographen mit Kopf- und Körperspule. Im Inneren des Phantoms wurden im Bereich des Kopfes eine Tiefenhirnstimulationselektrode eingebracht an deren Spitze die Messfaser eines faseroptischen Temperaturmessgerätes befestigt wurde, hier gekennzeichnet durch einen gelben Pfeil in Bild (b).

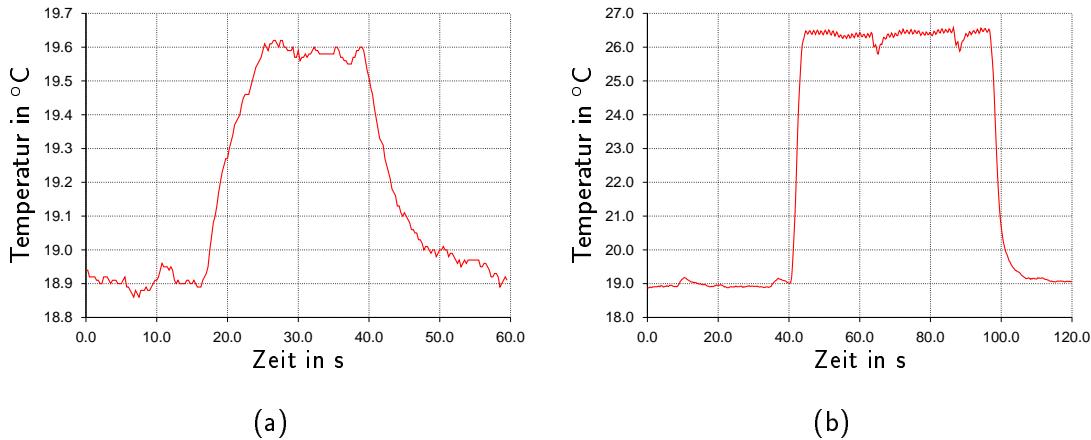
Phantom vom Ort, der Leitfähigkeit der Salzlösung, der Frequenz und der Richtung des magnetischen Grundfelds abhängen. Mit dieser Kenntnis sind Schlüsse auf die zu erwartende Erwärmung möglich, die im Anschluss die Ableitung von einfachen Verhaltensregeln zur Risikominimierung für Patienten bei MR-Untersuchungen erlauben. Eine Diskussion der experimentellen Ergebnisse im Vergleich zu den Erkenntnissen der numerischen Studie schließt das Unterkapitel ab.

Danach werden numerische Untersuchungen an einem Kopfmodell mit implantierter Tiefenhirnstimulationselektrode und ein Oberkörpermodell mit Herzschrittmacherelektrode vorgestellt. Dabei wird gezeigt, dass eine einfache Interpretation der Ergebnisse von Phantomstudien im Hinblick auf eine Bewertung der Gefährdung von Patienten nur eingeschränkt möglich ist. Das Kapitel schließt mit einer Zusammenfassung aller relevanten Ergebnisse der eigenen experimentellen und numerischen Studien ab.

## 6.2 Salzwasserphantome und Magnetresonanztomographie

### 6.2.1 Eigene experimentelle Arbeiten

Die experimentellen Studien an Salzwasserphantomen dienten bislang als wichtigste Grundlage der Bewertung von möglichen Gefahren für Patienten durch die Erwärmung von Elektroden und Implantaten bei der MR-Tomographie. Um eigene experimentelle Erfahrungen zu sammeln und die bekannten experimentellen Studien nachzuvollziehen, wurde im Rahmen einer Diplomarbeit ein eigenes Oberkörperphantom (HUBERTUS) aufgebaut und an einer Herz- und einer Tiefenhirnstimulationselektrode Messungen in verschiedenen MR-Tomographen durchgeführt (TABBERT, 2001).



**Abbildung 6.2:** Erwärmung einer Tiefenhirnstimulationselektrode im MR-Tomographen während einer Standard Turbo Spin Echo Sequenz bei 63,9 MHz. Die Temperatur steigt in Bild (a) nach dem Aktivieren der Sequenz bei  $t = 18$  s über einen Zeitraum von 8 s um  $0,8\text{ }^{\circ}\text{C}$  an und bleibt im weiteren Verlauf der Sequenz weitgehend konstant. Nach Unterbrechung der Sequenz bei  $t = 39$  s ergibt sich in einem Zeitraum von über 20 s ein exponentieller Abfall der Temperatur an der Elektrodenspitze bis auf ihren Ausgangswert bei  $18,9\text{ }^{\circ}\text{C}$ . In Bild (b) sind die Messergebnisse an einer Herzschrittmacherelektrode bei gleichen Sequenzparametern dargestellt. Nach Aktivieren der Sequenz steigt die Temperatur innerhalb von wenigen Sekunden um  $7,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  an, um nach Deaktivieren der Sequenz wieder ihren Ausgangswert in einem exponentiellen Abfall zu erreichen.

Abbildung 6.1 zeigt den experimentellen Aufbau des Oberkörperphantoms, welches aus einer Plexiglaswanne mit einem kleinen Kopfteil besteht, die dem Oberkörper eines Menschen nachempfunden ist. Die Wanne ist durch ein Trennkreuz im Inneren in vier Kompartimente aufgeteilt, die durch einige Löcher miteinander und mit dem Kopfteil verbunden sind. In den einzelnen Kompartimenten können durch seitliche Führungsleisten in verschiedenen Höhen Plastikgitter eingelegt werden, um Schrittmacher und Kabel darauf zu fixieren. Die Elektrodenkabel können durch die vorhandenen Verbindungslöcher in und durch andere Kompartimente verlegt werden. Zusätzliche Führungsbohrungen und -systeme ermöglichen die Fixierung von faseroptischen Temperaturmessfühlern an den untersuchten Herz- und Hirnelektroden und an den Schrittmachern im Phantom. An der Außenwand des Phantoms können an jeder Seite versilberte Kupferelektroden angebracht werden, um die Potentiale an der Oberfläche der Flüssigkeit während einer MR-Sequenz zu messen. Weiterhin wurden Vorrichtungen konzipiert, um die induzierten Spannungen an den Zuleitungen der Elektroden während der experimentellen Untersuchungen zu erfassen.

Das Phantom wurde in insgesamt drei MR-Tomographen mit unterschiedlichen Grundfeldstärken und -ausrichtungen untersucht (0,2 T, 1,5 T und 3,0 T). Bei den Experimenten wurden hochfrequenzintensive Turbo Spin Echo (TSE) Sequenzen aus der täglichen klinischen Anwendung mit einer großen Anzahl an HF-Pulsen verwendet. Abbildung 6.2 zeigt beispielhaft zwei Temperaturverläufe an den Schrittmacherlektroden.

Es zeigte sich, dass die gemessenen Erwärmungen an den Elektrodenspitzen abhängig sind von der Form der Elektrode, der Lage des Elektrodenkabels im Phantom, der Ausrichtung und Stärke des magnetischen Grundfelds und der Dauer des HF-Pulses. Im Experiment konnte eine maxi-

male Erwärmung von ca. 8 K bei einer Herzschrittmacherelektrode mit spiralförmiger Spitze in einem 1,5 T MR-Tomographen mit horizontaler statischer Grundfeldrichtung nachgewiesen werden. Entgegen den ersten Erwartungen zeigte sich, dass die Erwärmung an der Herzschrittmacherelektrode im 3 T MR-Tomographen unter den Werten der Messung im 1,5 T-Gerät lag. Bei 0,2 T Grundfeldstärke mit vertikaler Ausrichtung des statischen Magnetfeldes konnten keine Erwärmungen nachgewiesen werden.

Die Messwerte dieser Studie am 1,5 T MR-Tomographen reihen sich ein in die Angaben anderer Autoren, die in ähnlichen Szenarien vergleichbare Messergebnisse erhalten haben (CHOU & CHAN, 1997; REZAI ET AL., 2002; SOMMER ET AL., 2000).

Die Messung an der Tiefenhirnstimulationselektrode ergab lediglich Erwärmungen bis zu 0,8 K während einer TSE-Sequenz im 1,5 T MR-Tomographen. In den anderen Geräten konnte an dieser Elektrode keine Erwärmung nachgewiesen werden. Dieses Ergebnis wird in erster Linie auf die Elektrodenbauform als Halbkugel zurückgeführt, welche über keine Spitzen und Kanten verfügt. Entgegen den Ergebnissen von TRONNIER ET AL. (1999B) konnten mit der Tiefenhirnstimulationselektrode Erwärmungen, wenn auch sehr gering, nachgewiesen werden. Bei allen untersuchten Szenarien konnte keine Erwärmung der Schrittmachergehäuse selbst festgestellt werden.

Neben magnetischen Hochfrequenzfeldern werden gepulste magnetische Gradientenfelder zur Ortskodierung mit Schaltzeiten von teilweise weniger als einer Millisekunde benutzt. Der Einfluss dieser Felder wurde ebenfalls untersucht. Bei ausgeschalteten HF-Pulsen konnte aber durch die Gradientenfelder allein keine Erwärmung an den Elektroden erzeugt werden.

Die Erwärmungsmessungen wurden durch die Messung der induzierten Spannungen ergänzt. Dabei wurden an den Elektrodenkabeln und der Phantomoberfläche je nach Anordnung Spannungen im Bereich von weniger als 1 V aber auch bis zu 174 V nachgewiesen. Dieses Ergebnis liegt ebenfalls im Rahmen anderer publizierter Beobachtungen (TRONNIER ET AL., 1999B).

Die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen wurden bereits veröffentlicht (GOLOMBECK ET AL., 2001B; GOLOMBECK ET AL., 2001A; TABBERT ET AL., 2001). Eine ausführlichere Darstellung der Messaufbauten, insbesondere des Oberkörperphantoms, finden sich in der Diplomarbeit von TABBERT (2001).

Die Ergebnisse dieser Studie zeigten, dass bei der MR-Tomographie unter gewissen Voraussetzungen relevante Erwärmungen an den Spitzen von Herz- und Hirnschrittmacherelektroden auftreten, die im ungünstigsten Fall auch eine irreversible Schädigung des Gewebes hervorrufen könnten. In den Randbereichen des Phantoms traten dabei größere Erwärmungen auf, als in den Randbereichen.

Die Abhängigkeit der Erwärmung eines Kabels oder Elektrode von seiner Lage in einem Salzwasserphantom lassen eine genauere Betrachtung der elektrischen Feldverteilung in der Kochsalzlösung bei HF-Einstrahlung notwendig erscheinen, da nach Gleichung (4.7) die deponierte Leistung in der Flüssigkeit und damit die Erwärmung vom Quadrat des elektrischen Feldes abhängt. Einige feldtheoretische Überlegungen und die Ergebnisse einer numerischen Studie werden in den nächsten Abschnitten vorgestellt.

## 6.2.2 Die allgemeine Wellengleichung und ihre Grenzfälle

### 6.2.2.1 Die allgemeine Wellengleichung

Die Wellengleichung für das elektrische Feld  $\vec{E}$  in homogenen Medien lautet in ihrer allgemeinsten Form (LEHNER, 1996):

$$\Delta \vec{E} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (6.3)$$

Unter der Annahme, dass keine Raumladungen existieren, wie z. B. im betrachteten quaderförmigen Plexiglasphantom, das mit einem leitfähigen Medium gefüllt ist, vereinfacht sich Gleichung (6.3). Die Divergenz des elektrischen Feldes ist in diesem Fall gleich Null. So ergibt sich

$$\Delta \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (6.4)$$

Wie bereits in Unterkapitel 2.3 beschrieben wurde, werden bei sinusförmiger Feldanregung zweckmäßigerweise komplexe Feldgrößen eingeführt, da dies die Lösung der Differentialgleichung (6.4) vereinfacht (JACKSON, 1975). Die komplexen Größen werden hierbei analog zu Unterkapitel 2.3 durch Unterstreichung hervorgehoben. In Anlehnung an die Konventionen des Feldrechnungsprogrammes MAFIA teilt sich die Amplitude der Felder in einen Real- und Imaginärteil auf. Die komplexe Darstellung ist natürlich äquivalent zur Angabe der Feldgrößen als Amplitudenabsolutbetrag und Phase. Die Gleichungen (2.25) und (2.26) zeigen die Zusammenhänge zwischen komplexer Amplitude sowie Betrag und Phase. Bei sinusförmiger Feldanregung stellt der Imaginärteil der komplexen Amplitude die Feldverteilung gerade eine Viertelperiode nach dem Realteil dar. Für das elektrische Feld wird folgender Zusammenhang eingeführt:

$$\underline{\vec{E}}(x, y, z, t) = \underline{\vec{E}}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}.$$

Verwendet man diese komplexen Feldgrößen, so kann man die Ableitungen des elektrischen Feldes in Gleichung (6.4) nach der Zeit eliminieren. Die erste und zweite Ableitung nach der Zeit des komplexen elektrischen Feldes ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \underline{\vec{E}}(x, y, z, t) &= j\omega \cdot \underline{\vec{E}}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} = j\omega \cdot \underline{\vec{E}}(x, y, z, t) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\vec{E}}(x, y, z, t) &= (j\omega)^2 \cdot \underline{\vec{E}}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} = -\omega^2 \cdot \underline{\vec{E}}(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Damit kann Gleichung (6.4) nach Kürzen der Zeitabhängigkeit  $e^{j\omega t}$  umgeformt werden zu:

$$\Delta \underline{\vec{E}}(x, y, z) = j\omega \mu\sigma \underline{\vec{E}}(x, y, z) - \omega^2 \mu\varepsilon \underline{\vec{E}}(x, y, z). \quad (6.5)$$

Die dielektrischen Materialparameter  $\sigma$ ,  $\mu$  und  $\varepsilon$  können bei Berücksichtigung von Verlusten auch komplex sein (vgl. Abschnitt 3.3.1). Bei den hier diskutierten numerischen Modellen spielen aber magnetische Verluste keine Rolle. Weiterhin werden die dielektrischen Verluste bei

monofrequenter Feldanregung bereits in der Leitfähigkeit  $\sigma$  mit berücksichtigt, so dass die dielektrischen Materialparameter in der weiteren Betrachtung analog zur Darstellung in Abschnitt 2.3.2 rein reell sind.

Die physikalisch relevanten Lösungen ergeben sich jeweils aus Betrachtung der Lösungen der Differentialgleichung, sowie den Randbedingungen an den Rändern des betrachteten Rechenvolumens. Aus der komplexen Amplitude ergibt sich der Betrag und die Phase des Feldes.

Abschnitt A.1 im Anhang gibt eine kurze Übersicht über den allgemeinen Weg zur Lösung dieser Differentialgleichung mit einem Produktansatz. Danach ergeben sich bei einer Lösung des Problems in kartesischen Koordinaten für die einzelnen Komponenten des elektrischen Feldes Produkte von Funktionen der Art  $f(x) = C \cdot e^{\pm j\kappa x}$ . Eine Lösung von Gleichung (6.5) für das gesamte komplexe elektrische Feld in kartesischen Koordinaten kann dann geschrieben werden als (siehe auch Gleichung (A.9)):

$$\underline{\vec{E}}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \underline{f}_x(x) \cdot \underline{g}_x(y) \cdot \underline{h}_x(z) \\ \underline{f}_y(x) \cdot \underline{g}_y(y) \cdot \underline{h}_y(z) \\ \underline{f}_z(x) \cdot \underline{g}_z(y) \cdot \underline{h}_z(z) \end{pmatrix} \cdot e^{j\omega t}. \quad (6.6)$$

### 6.2.3 Grenzfälle der Wellengleichung

Die allgemeine Wellengleichung (6.5) enthält einen Wellenausbreitungs- und einen Diffusionsterm. Man kann daher zwei Grenzfälle betrachten, wenn man von denjenigen Fällen absieht in der die rechte Seite von Gleichung (6.5) gleich Null oder skalar ist (Laplace- und Poisson-Gleichung). Die Diskussion der Grenzfälle hier orientiert sich an den dielektrischen Parametern  $\sigma$ ,  $\epsilon$  und der Frequenz  $\omega = 2\pi \cdot f$ . Je nach Größe dieser Parameter dominiert entweder der Wellenausbreitungsterm oder der Diffusionsterm. In einer guten Näherung kann dann im Grenzfall jeweils einer dieser Terme vernachlässigt werden. Man erhält dann zum einen die Helmholtz-Wellengleichung oder die Diffusions-Differentialgleichung als quasistationäre Näherung (KÜPFMÜLLER & KOHN, 2000).

Der menschliche Körper liegt bei vielen Frequenzen allerdings zwischen diesen beiden Grenzfällen und stellt somit ein leitfähiges Dielektrikum dar, womit beide Näherungen ausscheiden und sowohl der Wellenausbreitungsterm, als auch der Diffusionsterm in der Wellengleichung berücksichtigt werden müssen. In den folgenden Abschnitten wird zunächst der allgemeine Fall eines leitenden Dielektriks behandelt und danach die beiden Grenzfälle für ideale Isolatoren und sehr gute Leiter vorgestellt und diskutiert.

#### 6.2.3.1 Leitfähige Dielektrika

In leitfähigen Dielektrika müssen in Gleichung (6.5) der Wellenausbreitungs- und der Diffusionsterm berücksichtigt werden. Zur Lösung dieser Differentialgleichung wird die komplexe Separationskonstante  $\underline{k}$  über die Dispersionsbeziehung

$$\underline{k}^2 = \omega^2 \mu \epsilon - j \omega \mu \sigma \quad (6.7)$$

eingeführt (vgl. auch Unterkapitel A.1 im Anhang). Diese im Fall leitfähiger Dielektrika komplexe Konstante  $\underline{k}$  teilt sich auf in einen Real- und einen Imaginärteil:

$$\underline{k} = k' + jk'' . \quad (6.8)$$

Setzt man die Definition (6.8) für die komplexe Konstante  $\underline{k}$  in die Dispersionsgleichung (6.7) ein, so kann man Real- und Imaginärteil separieren und getrennt voneinander bestimmen.

$$\underline{k}^2 = k'^2 + 2jk'k'' - k''^2 = \omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma . \quad (6.9)$$

Die Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt:

$$k'^2 - k''^2 - \omega^2\mu\varepsilon = 0 , \quad (6.10)$$

$$2k'k'' + \omega\mu\sigma = 0 . \quad (6.11)$$

Daraus folgt für  $k''$ :

$$k'' = -\frac{\omega\mu\sigma}{2k'} .$$

Setzt man dies in Gleichung (6.10) ein, so ergibt sich für  $k'^2$  eine quadratische Gleichung:

$$k'^4 - \omega^2\mu\varepsilon k'^2 - \frac{\omega^2\mu^2\sigma^2}{4} = 0 . \quad (6.12)$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind nach LEHNER (1996)

$$k' = \pm\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right)} .$$

Die Konstante  $k'$  soll reell sein, daher kommt von den beiden Vorzeichen unter der Wurzel nur das positive in Betracht:

$$k' = \pm\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1\right)} . \quad (6.13)$$

Setzt man dieses Ergebnis in Gleichung (6.11) ein und löst nach der Konstanten  $k''$  auf, so ergibt sich:

$$k'' = \pm\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} - 1\right)} . \quad (6.14)$$

Diese Separationskonstante fließt direkt als Parameter in die Lösungen der allgemeinen Wellengleichung (6.5) mit ein. Der Realteil  $k'$  von  $\underline{k}$  wird auch Phasenkonstante genannt, der imaginäre Anteil  $k''$  auch Dämpfungskonstante. In Anhang A.1 wird die Bedeutung der Separationskonstante an einem Beispiel verdeutlicht.

Im folgenden werden die Grenzfälle eines idealen Isolators und eines guten Leiters diskutiert und von den allgemeinen Formeln (6.13) und (6.14) für die Separationskonstante  $\underline{k}$  Näherungslösungen abgeleitet.

### 6.2.3.2 Ideale Isolatoren

In Isolatoren und schlechten Leitern mit kleiner Leitfähigkeit  $\sigma$  und hoher Frequenz  $\omega$  dominiert der Wellenausbreitungsterm. Ein Grenzfall ist insbesondere der Fall des Isolators mit  $\sigma = 0 \text{ S/m}$ . Gleichung (6.5) reduziert sich dann zu

$$\Delta \vec{E}(x, y, z) = \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E}(x, y, z) . \quad (6.15)$$

Diese Gleichung kann weiter zur bekannten Wellengleichung für homogene, ladungsfreie und nichtleitende Medien umgeformt werden:

$$(\Delta - \omega^2 \mu \varepsilon) \cdot \vec{E}(x, y, z) = 0 . \quad (6.16)$$

In diesem Sonderfall ist nach LEHNER die bereits eingeführte Konstante  $\underline{k}$  reell und die Lösungen dieser Wellengleichung für harmonische Anregungen sind Sinus- und Kosinusfunktionen als Realteile der allgemeinen Lösung mit komplexer Zeitabhängigkeit.

Löst man die Wellengleichung in kartesischen Koordinaten für jede Raumrichtung, so bilden die einzelnen Komponenten  $k_i$  der Separationskonstante den Wellenzahlvektor  $\vec{k}$ . Die Formel für die  $k_i$  ergibt sich aus der Gleichung (6.13) für die  $k'$  unter der Annahme, dass entweder  $\sigma = 0 \text{ S/m}$  oder  $\sigma \ll \omega \varepsilon$  gilt und damit ebenso der Diffusionsterm in Gleichung (6.5) vernachlässigt werden kann. Aus Gleichung (6.13) folgt dann für diesen Grenzfall für die Werte der Komponenten  $k_i$  des Wellenzahlvektors:

$$k_i = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} . \quad (6.17)$$

### 6.2.3.3 Gute Leiter

Wenn im betrachteten Medium bei hinreichend großer Leitfähigkeit  $\sigma$  und niedrigen Frequenzen  $\omega$  der Zusammenhang  $\sigma \gg \omega \varepsilon$  oder gleichbedeutend  $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1$  gilt, dann vereinfachen sich die Gleichungen (6.13) und (6.14) zu:

$$k' \approx k'' \approx \pm \sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}} . \quad (6.18)$$

Dies entspricht der Lösung, die man erhalten hätte, wenn man in der Dispersionsbeziehung (6.7) von Anfang an den Beitrag des Wellenausbreitungsterms  $-\omega^2 \mu \varepsilon$  vernachlässigt hätte und das Problem gemäß dem Ansatz aus Gleichung (6.9) gelöst hätte.

Die Vernachlässigung des Wellenausbreitungsterms in Gleichung (6.5) bedeutet physikalisch betrachtet, dass der Verschiebungsstrom in der ersten Maxwell-Gleichung vernachlässigt wird. Anschaulicher kann man sagen, dass die oszillierenden elektrischen Felder in diesem Fall durch entsprechende Ladungsbewegungen und daraus resultierende Raumladungsfelder hinreichend schnell kompensiert werden können. Gleichung (6.5) vereinfacht sich dann zu:

$$\Delta \vec{E}(x, y, z) = j\omega\mu\sigma \vec{E}(x, y, z) . \quad (6.19)$$

Diese Gleichung kann weiter zur bekannten Diffusionsgleichung für homogene, ladungsfreie und leitende Medien umgeformt werden:

$$(\Delta - j\omega\mu\sigma) \cdot \vec{E} = 0 . \quad (6.20)$$

Die Lösungen dieser Gleichung für harmonische Anregungen sind ebenfalls Sinus- und Kosinusfunktionen, die mit einem exponentiellen Dämpfungsanteil multipliziert werden. Ein Beispiel dazu findet sich in Anhang A.1.

## 6.2.4 Lösung der Wellengleichung für ein quaderförmiges Phantom

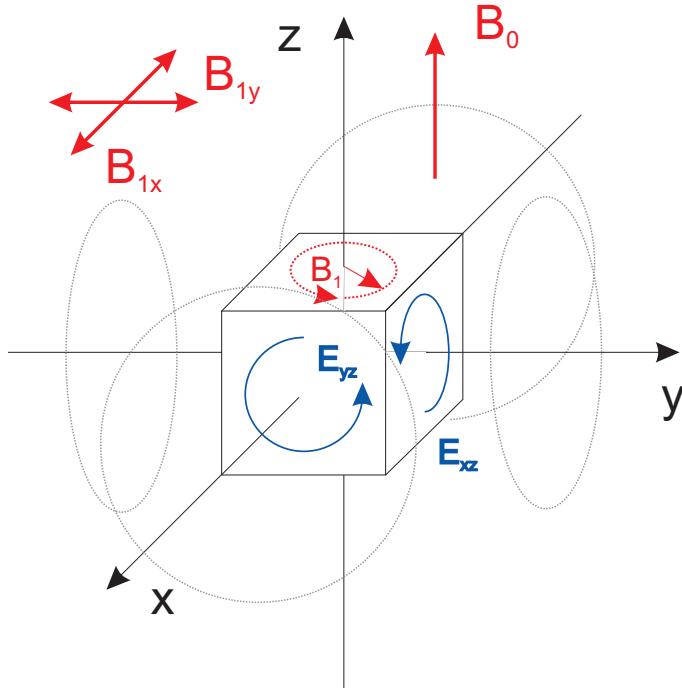
### 6.2.4.1 Modellierung der Hochfrequenzanregung

Die Auslenkung der ausgerichteten magnetischen Dipolmomente (Spins) der Protonen erfolgt im MR-Tomographen, wie bereits in Abschnitt 6.1.1 beschrieben, durch eine rotierende magnetische Flussdichte, die der Larmor-Bedingung (6.1) genügt. Es bieten sich in der numerischen Feldrechnung mehrere Möglichkeiten an, solch eine Feldanregung zu modellieren. Bei allen Modellen dieser Arbeit wurde die Feldanregung durch zwei Helmholtzspulenpaare realisiert, von denen ein Spulenpaar mit einem um  $90^\circ$  phasenverschobenen Strom gespeist wurde, um die rotierende Flussdichte zu erzeugen.

Parallele kreisrunde Spulenpaare, deren Abstand gleich dem Spulenradius ist, erfüllen die Helmholtzbedingung und zeichnen sich durch ihre hohe Feldhomogenität in ihrem Zentrum aus. Der homogene Feldbereich ist abhängig vom Radius der Spulen und muss bei der Erstellung numerischer Modelle bedacht werden. Die einfache Modellierung solcher Spulenpaare in der verwendeten Feldrechnungssoftware ist ein weiterer Vorteil. Umfassende Informationen und eine Formelsammlung für Helmholtzspulen finden sich in HUBER UND URBAN (1995).

Abbildung 6.3 zeigt eine schematische Übersicht des numerischen Modells mit der Zuordnung der Raumrichtungen zu den wesentlichen elektrischen Feldern und magnetischen Flussdichten. Der Mittelpunkt des Phantoms liegt genau im Koordinatenursprung. Die Kanten des Phantoms sind parallel zu den Koordinatenachsen ausgerichtet. Die Kantenlängen des Phantoms sind in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung durch  $\pm x_0$ ,  $\pm y_0$  und  $\pm z_0$  vorgegeben. Das statische Grundfeld ist gemäß den Konventionen in der MR-Tomographie parallel zur  $z$ -Richtung ausgerichtet.

Die beiden Helmholtzspulenpaare sind senkrecht zur  $x$ - und  $y$ -Achse angeordnet. Sie erzeugen die magnetischen Flussdichten  $\vec{B}_{1x}$  und  $\vec{B}_{1y}$ , welche im Bereich des Phantoms eine homogene magnetische Flussdichte erzeugen. Die Superposition beider Felder erzeugt mit einer Phasenverschiebung der anregenden Ströme von  $90^\circ$  einen Flussdichtevektor  $\vec{B}_1$  der senkrecht zu  $\vec{B}_0$  um die  $z$ -Achse mit der Larmorfrequenz  $\omega_l$  rotiert.



**Abbildung 6.3:** Schemazeichnung des Salzwasserphantoms im MR-Tomographen. Das statische Grundfeld mit der Flussdichte  $B_0$  ist parallel zur  $z$ -Achse. Die beiden Helmholtzspulenpaare erzeugen durch ihre phasenverschobene Anregung eine rotierende magnetischen Flussdichte  $B_1$ , die sich aus den mit einer Phasenverschiebung von  $\pi/2$  oszillierenden Flussdichten  $B_{1x}$  und  $B_{1y}$  zusammensetzt. Diese wiederum erzeugen ihrerseits abwechselnd rotierende elektrische Felder  $E_{xz}$  und  $E_{yz}$  im Inneren des mit einer Salzlösung gefüllten Phantoms.

Die Stärke der anregenden Flussdichte  $\vec{B}_1$  hängt mit der benötigten Pulsdauer des anregenden HF-Pulses zusammen. Sie ergibt sich gemäß Gleichung (6.2) aus dem gewünschten Flipwinkel  $\alpha$  und der Pulsdauer  $t_p$ . Die magnetische Flussdichte  $B_1$  ist proportional zur anregenden Stromstärke durch die Spulen (HUBER & URBAN, 1995).

Jede der hochfrequenten Flussdichten erzeugt wiederum nach Gleichung (2.1) ein elektrisches Wirbelfeld im Inneren des Salzwasserphantoms. Die Superposition der beiden hochfrequenten anregenden Flussdichten erzeugt ihrerseits ein komplexes elektrisches Wirbelfeld, welches um die  $z$ -Achse rotiert.

Ausgehend von der Anordnung nach Abbildung 6.3 kann das Primärfeld der hochfrequenten magnetischen Flussdichte  $\vec{B}_1$  folgendermaßen definiert werden:

$$\vec{B}_1(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} B_{1x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \\ B_{1y} \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \\ B_{1z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_3) \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Vernachlässigt man die durch die im Salzwasserphantom induzierten Ströme entstehenden magnetischen Sekundärfelder, dann ist unter Annahme dieser Näherung im beschriebenen Beispiel

die  $z$ -Komponente von  $\vec{B}_1$  gleich Null. Ist die Amplitude der  $x$ - und der  $y$ -Komponente von  $\vec{B}_1$  gleich groß und wurde die Phasenverschiebung zwischen der  $x$ - und der  $y$ -Komponente auf  $90^\circ$  oder  $\pi/2$  festgelegt, kann auch hier für die magnetische Induktion die bereits gezeigte komplexe Notation eingeführt werden:

$$\underline{\vec{B}}_1(x, y, z, t) = B_{1xy} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot e^{j\omega t}. \quad (6.22)$$

Nach der ersten Maxwell-Gleichung (2.1) entspricht die Rotation des komplexen elektrischen Feldes der negativen ersten Ableitung nach der Zeit der komplexen magnetischen Induktion:

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \partial \underline{E}_z / \partial y - \partial \underline{E}_y / \partial z \\ \partial \underline{E}_x / \partial z - \partial \underline{E}_z / \partial x \\ \partial \underline{E}_y / \partial x - \partial \underline{E}_x / \partial y \end{pmatrix} \cdot e^{j\omega t} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\vec{B}}_1 = -j\omega \cdot B_{1xy} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{j\omega t}. \quad (6.23)$$

Die rechte Seite von Gleichung (6.23) gibt Hinweise über die Struktur möglicher Lösungen für das elektrische Feld  $\underline{\vec{E}}$ . Da die  $z$ -Komponente der magnetischen Flussdichte  $\underline{\vec{B}}_1$  Null ist, können die Abhängigkeiten der Lösungsfunktionen des elektrischen Feldes von den Raumkoordinaten weiter vereinfacht werden. Im folgenden wird willkürlich ein einfacher Ansatz gewählt, in der die Koordinatenabhängigkeiten der einzelnen Komponenten der Lösungsfunktion für das elektrische Feld reduziert werden, so dass nur die in der Rotation in Gleichung (6.23) auftretenden Koordinaten der partiellen Ableitungen als Veränderliche der einzelnen elektrischen Komponenten berücksichtigt werden. Die Abhängigkeit einzelner Feldkomponenten von den anderen Koordinaten wird als konstant angenommen. So wird z. B. die  $x$ -Komponente des elektrischen Feldes als eine von der  $z$ -Koordinate abhängige Funktion angenommen. Weiterhin muss berücksichtigt werden, dass sich an den Rändern des Phantoms die jeweils zum Seitenrand senkrechten elektrischen Feldelementen zu Null ergeben müssen. Dadurch besitzt z. B. die  $x$ -Komponente des elektrischen Feldes neben der  $z$ - auch eine  $x$ -Abhängigkeit. Dies gilt auch analog für die  $y$ - und die  $z$ -Komponente, die zusätzlich eine  $y$ - bzw.  $z$ -Abhängigkeit besitzen. Es ergibt sich folgender Ansatz für das elektrische Feld:

$$\underline{\vec{E}}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \underline{E}_x(x, z) \\ \underline{E}_y(y, z) \\ \underline{E}_z(x, y, z) \end{pmatrix} \cdot e^{j\omega t}. \quad (6.24)$$

Für die Berechnung der Energieabsorption im Phantom ist nach Gleichung (4.7) nur die Amplitude des elektrischen Feldes von Bedeutung. Die folgende Betrachtung konzentriert sich daher auf die Berechnung der Maximalwerte des elektrischen Feldes. Etwaige Phasenverschiebungen, die ebenfalls aus dem komplexen elektrischen Feld  $\underline{\vec{E}}$  berechnet werden können, werden nicht berücksichtigt.

#### 6.2.4.2 Lösungen der Wellengleichung mit Randbedingungen

Um das elektrische Feld im Inneren des leitfähigen Salzwasserphantoms zu berechnen, muss die Wellengleichung (6.5) gelöst werden. Die Lösungen dieser Gleichung sind z. B. Produkte von

Funktionen von der Form (6.6). Für die weitere Betrachtung ist es zweckmäßig, die einzelnen Produktterme der Lösungsfunktion getrennt zu betrachten und erst später wieder zusammen zu setzen. Gleichung (6.24) kann aufgespalten werden in:

$$\vec{E}_{\text{Am}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \underline{E}_x(z) \cdot \underline{E}_x(x) \\ \underline{E}_y(z) \cdot \underline{E}_y(y) \\ \underline{E}_z(x, y) \cdot \underline{E}_z(z) \end{pmatrix} = \underline{E}_{\text{Am}_A} \cdot \underline{E}_{\text{Am}_B}. \quad (6.25)$$

Im folgenden wird zunächst der Anteil  $\underline{E}_{\text{Am}_A}$  betrachtet. Eine weitere Vereinfachung bei der Berechnung der Amplitude von  $\underline{E}_{\text{Am}_A}$  ergibt sich aus der Tatsache, dass die beiden senkrecht zueinander stehenden Spulenpaare getrennt voneinander betrachtet und die Ergebnisse danach superponiert werden können. Die Amplitude des elektrischen Feldes  $\underline{E}_{\text{Am}_A}$  wird daher zunächst in zwei Teile  $\underline{E}_{\text{Am}_{A,1}}$  und  $\underline{E}_{\text{Am}_{A,2}}$  für beide Spulenpaare zerlegt. Aus Gleichung (6.25) ergeben sich dann folgende Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\text{Am}_{A,1}}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \underline{E}_x(z) \\ 0 \\ \underline{E}_z(x) \end{pmatrix} \\ \underline{E}_{\text{Am}_{A,2}}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E}_y(z) \\ \underline{E}_z(y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Verwendet man die im Anhang A.1 abgeleitete Lösung (A.9) und die Umformung für die komplexe Separationskonstante  $\underline{k}$  gemäß Gleichung (6.8), so ergeben sich als Lösungen für die Amplituden des elektrischen Feldes:

$$\underline{E}_{\text{Am}_{A,1}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} C_{z1} \cdot e^{-jk'_{z1}z} \cdot e^{k''_{z1}z} + C_{z2} \cdot e^{jk'_{z1}z} \cdot e^{-k''_{z1}z} \\ 0 \\ C_{x5} \cdot e^{-jk'_{x3}x} \cdot e^{k''_{x3}x} + C_{x6} \cdot e^{jk'_{x3}x} \cdot e^{-k''_{x3}x} \end{pmatrix}, \quad (6.26)$$

$$\underline{E}_{\text{Am}_{A,2}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{z3} \cdot e^{-jk'_{z2}z} \cdot e^{k''_{z2}z} + C_{z4} \cdot e^{jk'_{z2}z} \cdot e^{-k''_{z2}z} \\ C_{y5} \cdot e^{-jk'_{y3}y} \cdot e^{k''_{y3}y} + C_{y6} \cdot e^{jk'_{y3}y} \cdot e^{-k''_{y3}y} \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Die Beträge der einzelnen komplexen Komponenten der Amplituden  $\underline{E}_{\text{Am}_{A,1}}$  und  $\underline{E}_{\text{Am}_{A,2}}$  ergeben sich gemäß der Umformung nach Gleichung (2.25). Die genauen Rechenschritte sind in Anhang A.2 aufgeführt. Es ergeben sich die reellen Vektoren  $\vec{E}_{\text{Am}_{A,1}}$  und  $\vec{E}_{\text{Am}_{A,2}}$ :

$$\vec{E}_{\text{Am}_{A,1}} = |\underline{E}|_{\text{Am}_1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{C_{z1}^2 e^{2k''_{z1}z} + C_{z2}^2 e^{-2k''_{z1}z} + 2C_{z1}C_{z2} \cos(2k'_{z1}z)} \\ 0 \\ \sqrt{C_{x5}^2 e^{2k''_{x3}x} + C_{x6}^2 e^{-2k''_{x3}x} + 2C_{x5}C_{x6} \cos(2k'_{x3}x)} \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

$$\vec{E}_{\text{Am}_{A,2}} = |\underline{\vec{E}}|_{\text{Am}_2}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{C_{z3}^2 e^{2k''_{z2}z} + C_{z4}^2 e^{-2k''_{z2}z} + 2C_{z3}C_{z4} \cos(2k'_{z2}z)} \\ \sqrt{C_{y5}^2 e^{2k''_{y3}3} + C_{y6}^2 e^{-2k''_{y3}y} + 2C_{y5}C_{y6} \cos(2k'_{y3}y)} \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Die Gleichungen (6.28) und (6.29) können im Fall eines quaderförmigen Phantoms durch genauere Betrachtung der geometrischen Anordnung und der Randbedingungen noch weiter vereinfacht werden. Legt man den Koordinatenursprung genau in den geometrischen Mittelpunkt des Phantoms und ordnet die Spulenpaare symmetrisch zum Ursprung an, so verschwindet das elektrische Feld im Mittelpunkt des Phantoms und man erhält als Randbedingung  $\vec{E}_{\text{Am}_{A,1/2}}(0, 0, 0) = \vec{0}$ .

Da die Kosinusterme in den Gleichung (6.28) und (6.29) im Ursprung nicht verschwinden, wie auch die exponentiellen Dämpfungsterme, müssen die Konstanten  $C$  so gewählt werden, dass diese Randbedingung erfüllt wird. Die Kosinus- sowie die Exponentialfunktion ergeben bei Einsetzen von 0 als Funktionswert 1. Daraus ergibt sich für die Konstanten  $C$  am Beispiel der x-Komponente von Gleichung (6.28) folgender Zusammenhang:

$$C_{z1}^2 + C_{z2}^2 + 2C_{z1}C_{z2} = 0.$$

Die einzige reelle nicht-triviale Lösung dieser Gleichung ist:

$$C_{z1} = -C_{z2}.$$

Wie leicht ersichtlich ist, gilt gleiches auch für die Konstanten  $C_{x5}$  und  $C_{x6}$ , sowie den Konstanten  $C$  aus Gleichung (6.29):

$$\begin{aligned} C_{x5} &= -C_{x6} \\ C_{z3} &= -C_{z4} \\ C_{y5} &= -C_{y6}. \end{aligned}$$

Als Folge davon kann man die Konstanten  $C$  in den Gleichungen (6.28) und (6.29) ausklammern und es bleiben Kombinationen von Exponentialfunktionen übrig. In diesem besonderen Fall ist es möglich, die Exponentialfunktionen gemäß der Identität  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  in hyperbolische Kosinusfunktionen umzuwandeln (BRONŠTEJN & SEMENDJAEV, 1991). Die Gleichungen lassen sich daher weiter vereinfachen zu:

$$\vec{E}_{\text{Am}_{A,1}} = \begin{pmatrix} C_{z1} \cdot \sqrt{2 \cosh(2k''_{z1}z) - 2 \cos(2k'_{z1}z)} \\ 0 \\ C_{x5} \cdot \sqrt{2 \cosh(2k''_{x3}x) - 2 \cos(2k'_{x3}x)} \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

$$\vec{E}_{\text{Am}_{A,2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{z3} \cdot \sqrt{2 \cosh(2k''_{z2}z) - 2 \cos(2k'_{z2}z)} \\ C_{y5} \cdot \sqrt{2 \cosh(2k''_{y3}y) - 2 \cos(2k'_{y3}y)} \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Eine weitere Vereinfachung dieser Gleichungen ergibt sich bei Betrachtung der Konstanten  $k$ . Vernachlässigt man die möglichen Reflexionen des elektrischen Feldes an den Rändern des Phantoms bei den Übergängen von Salzlösung in Plexiglas und danach in Luft, so ergeben sich nach LEHNER (1996) als Lösungen für das elektrische Feld homogene Wellen (sh. Anhang A.1), die sich entlang ausgezeichneter Raumrichtungen ausbreiten. Die einzelnen Vektorkomponenten der beiden Amplituden des elektrischen Feldes  $\vec{E}_{\text{Am}_{A,1}}$  und  $\vec{E}_{\text{Am}_{A,2}}$  sind nach Gleichung (6.30) und (6.31) nur von einer Raumkoordinate und damit nur von einer der komplexen Konstanten  $k_x$ ,  $k_y$  oder  $k_z$  abhängig.

Betrachtet man die Dispersionsbeziehung (6.7) für jede einzelne Komponente, so erkennt man, dass in diesem Fall für alle komplexen Konstanten  $k_x$ ,  $k_y$  und  $k_z$  der gleiche Zusammenhang gilt, da die dielektrischen Parameter des Salzwasserphantoms in allen Raumrichtungen homogen sind. Die Konstanten  $k_i$  und damit auch die Konstanten  $k'_i$  und  $k''_i$  in den Gleichungen (6.30) und (6.31) sind somit gleich groß. Ihre Werte ergeben sich dann aus den bereits abgeleiteten Gleichungen (6.13) und (6.14).

Ist die Form des Salzwasserphantoms ein Würfel oder Quader mit mindestens zwei gleich langen Seiten, so sind weitere Vereinfachungen in den Gleichungen (6.30) und (6.31) bezüglich der Konstanten  $C$  möglich. Im Falle eines Würfels haben alle Konstanten  $C$  den gleichen Wert. Damit und mit den Vereinfachungen für die Konstanten  $k$  kann man die Gleichungen für die Beträge der Amplituden des elektrischen Feldes in ihrer einfachsten Form angeben:

$$\vec{E}_{\text{Am}_{A,1}} = C \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2 \cosh(2k''z) - 2 \cos(2k'z)} \\ 0 \\ \sqrt{2 \cosh(2k''x) - 2 \cos(2k'x)} \end{pmatrix}, \quad (6.32)$$

$$\vec{E}_{\text{Am}_{A,2}} = C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2 \cosh(2k''z) - 2 \cos(2k'z)} \\ \sqrt{2 \cosh(2k''y) - 2 \cos(2k'y)} \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Zuletzt muss noch der Gesamtbetrag der Teilamplitude  $\vec{E}_{\text{Am}_A}$  aus den beiden Teillösungen  $\vec{E}_{\text{Am}_{A,1}}$  und  $\vec{E}_{\text{Am}_{A,2}}$  berechnet werden. Die beiden Teillösungen stellen jeweils die Maximalwerte des elektrischen Feldes zweier sinusförmiger Anregungen mit gleicher Frequenz dar, die gegeneinander um eine Viertelperiode phasenverschoben sind. Diesem Umstand ist bei der Überlagerung Rechnung zu tragen. Dies spielt für die  $x$ - und die  $y$ -Komponente der Lösungen zwar keine Rolle, da sie jeweils nur in einer der beiden Lösungsfunktionen einen von Null verschiedenen Wert haben. Geht man aufgrund des homogenen Problems von einer konstanten Phasenverschiebung zwischen beiden Lösungen aus, so ergibt sich die  $z$ -Komponente der Gesamtamplitude als Wurzel aus der Summe der Betragsquadrate der  $z$ -Komponenten beider Teillösungen. Der Gesamtbetrag der Teilamplitude  $\vec{E}_{\text{Am}_A}$  des elektrischen Feldes ergibt sich damit zu:

$$\vec{E}_{\text{Am}_A} = C \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2 \cosh(2k''z) - 2 \cos(2k'z)} \\ \sqrt{2 \cosh(2k''z) - 2 \cos(2k'z)} \\ \sqrt{2 \cosh(2k''y) - 2 \cos(2k'y) + 2 \cosh(2k''x) - 2 \cos(2k'x)} \end{pmatrix}. \quad (6.34)$$

Die Teilamplitude  $\vec{E}_{\text{Am}_B}$  hat die Funktion, die Normalkomponenten des elektrischen Feldes an den Phantomrändern verschwinden zu lassen, da ein Stromfluss aus dem Salzwasserphantom heraus nicht möglich ist. Um diese Randbedingung zu erfüllen, ergibt sich nach JACKSON ausgehend von der im Anhang A.1 gezeigten Grundlösung (A.6) eine Superposition einzelner Kosinusfunktionen als Reihenentwicklung. Die Linearkombination von Kosinusfunktionen, die z. B. die  $x$ -Komponente der elektrischen Feldstärke in Gleichung (6.24) an den Rändern des Phantoms bei  $x_0$  und  $-x_0$  verschwinden lässt, ist reell und lautet (JACKSON, 1975):

$$E_{\text{Am}_B,x}(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{x,n} \cdot \cos \left( \frac{n \cdot \pi}{2 \cdot x_0} \cdot x \right). \quad (6.35)$$

Bei der Reihenentwicklung liefern nur die ungeraden  $n$  einen Beitrag. Gleichermaßen gilt auch für die  $y$ - und die  $z$ -Komponente der Teilamplitude  $\vec{E}_{\text{Am}_B}$ . Die Koeffizienten  $A_{x,n}$  werden im folgenden nicht weiter betrachtet. Stattdessen sei für eine explizite Bestimmung auf JACKSON (1975) verwiesen.

In Gleichung (6.35) muss man bei kleinen  $z$ -Werten von  $E_x(x, z)$  sehr viele Summanden in Betracht ziehen, um eine hinreichend genaue Näherung zu erhalten. Nach JACKSON ist es aber für Werte  $z > z_0/\pi$  ausreichend, nur den ersten Summand zu berücksichtigen. Aus Gleichung (6.35) ergibt sich dann als Näherung:

$$E_{\text{Am}_B,x}(x) = A_{x,1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_0} \right). \quad (6.36)$$

Mit der  $y$ - und der  $z$ -Komponente der Teilamplitude  $\vec{E}_{\text{Am}_B}$  wird analog verfahren. Man erhält dann die reelle Teilamplitude  $\vec{E}_{\text{Am}_B}$ :

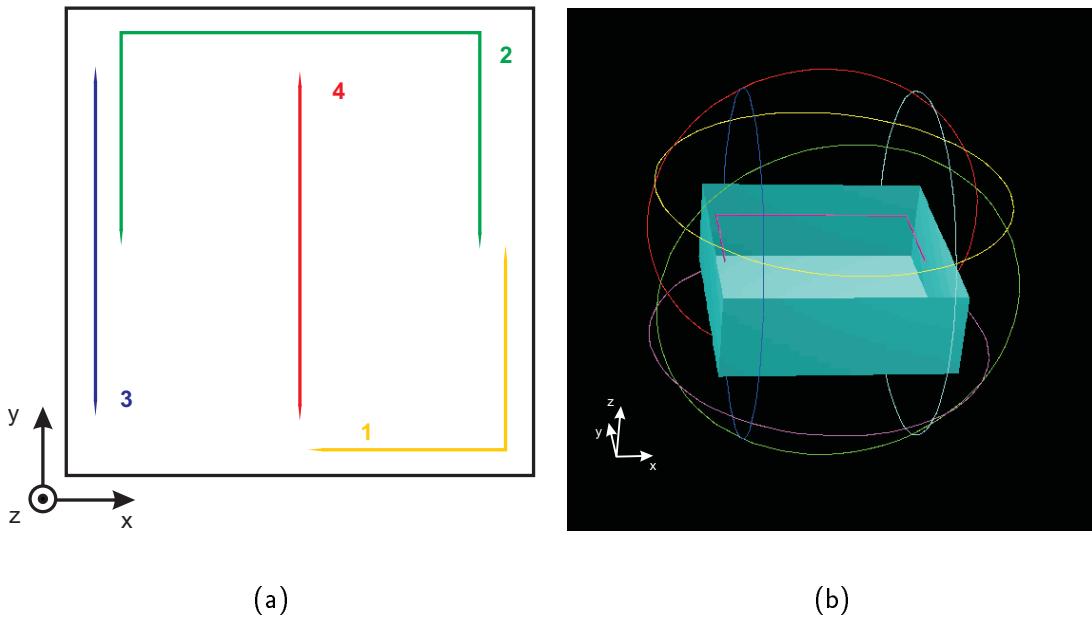
$$\vec{E}_{\text{Am}_B}(x, y, z) = \begin{pmatrix} E_x(x) \\ E_y(y) \\ E_z(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{x,1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_0} \right) \\ A_{y,1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{y_0} \right) \\ A_{z,1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{z_0} \right) \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

Die Gesamtamplitude  $\vec{E}_{\text{Am}}$  ergibt sich dann nach Gleichung (6.25) durch Multiplikation von Gleichung (6.34) mit der Näherungslösung (6.37) zu:

$$\vec{E}_{\text{Am}} = C \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2 \cosh(2k''z) - 2 \cos(2k'z)} \cdot A_{x,1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2x_0} \cdot x \right) \\ \sqrt{2 \cosh(2k''y) - 2 \cos(2k'y)} \cdot A_{y,1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2y_0} \cdot y \right) \\ \sqrt{2 \cosh(2k''x) - 2 \cos(2k'x)} \cdot A_{z,1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2z_0} \cdot z \right) \end{pmatrix}. \quad (6.38)$$

Zur Abschätzung der deponierten Energie an einem beliebigen Punkt im Salzwasserphantom ist noch das Betragsquadrat der Maximalamplitude  $\vec{E}_{\text{Am}}$  zu bilden.

Bei der Ableitung der Lösung (6.38) wurden mehrere Vereinfachungen und Näherungen verwendet, die die allgemeine Gültigkeit der Lösung einschränken. Der wichtigste Punkt stellt hierbei



**Abbildung 6.4:** Bild (a) zeigt die vier verschiedenen Kabelpositionen im quaderförmigen Salzwasserphantom, die in den Modellen 1 bis 4 realisiert wurden. Bild (b) zeigt das komplexe numerische Modell mit den drei Helmholtzspulenpaaren, die zur Feldanregung verwendet wurden. Im oben offenen Salzwasserphantom ist Kabelposition 2 zu erkennen.

die Vernachlässigung möglicher Reflexionen an den Phantomrändern dar. Abhängig von der Leitfähigkeit der Salzlösung ergibt sich im Phantom ein mehr oder weniger komplexes Muster an Feldminima und -maxima, welches mit Gleichung (6.38) nicht ganz richtig beschrieben werden kann. Gleichung (6.38) wird nur dann zufriedenstellende Lösungen ergeben, wenn durch die Leitfähigkeit der Salzlösung eine ausreichende Dämpfung und damit ein Abfall des elektrischen Feldes im Inneren des Phantoms gegeben ist. Eine ähnliche Überlegung gilt für die Vernachlässigung der Auswirkungen des induzierten Sekundärfeldes auf das anregende Primärfeld. Weiterhin wurde bei der analytischen Lösung in Gleichung (6.37) nur der erste Summand der Reihenentwicklung in Betracht gezogen und kein Kabel im Phantom berücksichtigt. In den nächsten Abschnitten werden beim Vergleich zwischen numerischer Lösung und dieser Näherungslösung die hier angesprochenen Grenzen der Abschätzung deutlich.

### 6.2.5 Konzeption einer numerischen Studie mit Salzwasserphantomen

Die Ergebnisse verschiedener experimenteller Studien sowie eigener Experimente motivierten zur Durchführung einer numerischen Studie mit insgesamt 384 einzelnen numerischen Modellen. Diese große Anzahl an Modellen war notwendig, um Schwierigkeiten bei experimentellen Studien zu überwinden, die in der Regel in der Auswahl der Parameter und Modelle stark eingeschränkt sind. Dies führt dazu, dass die Aussagen verschiedener Studien oft widersprüchlich und nicht miteinander vergleichbar erscheinen.

In Anlehnung an eigene experimentelle Studien mit Schrittmacherelektroden wurden in die numerischen Modelle ein isoliertes Platin-Iridium-Kabel mit einem Drahtdurchmesser von 4 mm

und einem Gesamtdurchmesser von 6 mm inklusive PTFE-Isolation (Polytetrafluoroethylen) integriert. Die Kabel waren an beiden Enden auf einer Länge von 10 mm abisoliert und verfügten entweder über ein spitzes oder ein flaches Kabelende. Als Material wurde eine Platin-Iridium-Legierung gewählt, die auch bei herkömmlichen Elektrodenkabeln Verwendung findet.

Betrachtet man die Wellenlänge in der Salzlösung, so muss berücksichtigt werden, dass die Wellenlänge der HF-Pulse aufgrund der höheren relativen Permittivität im Vergleich zum freien Raum verkürzt ist gemäß (KUCHLING, 1991):

$$\lambda = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \cdot f} . \quad (6.39)$$

Mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0 = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , der Permittivität der Salzlösung von  $\varepsilon_r = 78$  und den einzelnen Frequenzen der HF-Pulse ergeben sich Wellenlängen in der Salzlösung von 0,782 m bei 42,6 MHz, 0,521 m bei 63,9 MHz und 0,261 m bei 127,8 MHz. Die Kabellängen wurden daher je nach Modellkonfiguration mit 0,7 m oder 1,4 m so gewählt, dass die Kabellängen keine Vielfachen der halben Wellenlänge besaßen, um Resonanzen zu vermeiden. Diese Effekte sollten nicht in dieser numerischen Studie untersucht werden.

Die Kabel wurden an vier verschiedenen Positionen in einem quaderförmigen Plexiglasphantom mit einer Grundfläche von 0,8 m  $\times$  0,8 m und einer Höhe von 0,4 m platziert. Abbildung 6.4 zeigt die vier verschiedenen Kabelpositionen im Plexiglasphantom, die im folgenden analog zu der Nummerierung in der Abbildung mit Modell 1, 2, 3 oder 4 bezeichnet werden.

Weiterhin zeigt die Abbildung das komplette numerische Modell mit der Helmholtzspulenanordnung zur Modellierung der HF-Anregung bei der MR-Tomographie. Dabei wurden drei Spulenpaare verwendet, so dass unterschiedliche magnetische Grundfeldausrichtungen simuliert werden konnten. Bei den Berechnungen wurden zwei Grundmagnetfeldrichtungen berücksichtigt. Im einen Fall steht das statische Grundfeld senkrecht zur Grundfläche des Phantoms (in  $z$ -Richtung - vgl. Abbildung 6.4) und gibt die Magnetfeldrichtung in einem offenen MR-Tomographen mit C-förmiger Magnetbauform wieder. Im anderen Fall befindet sich das statische Grundfeld senkrecht zur  $xz$ -Ebene (in  $y$ -Richtung), was die Verhältnisse in einem geschlossenen röhrenförmigen MR-Tomographen wiedergibt. Im folgenden werden die beiden statischen Magnetfeldrichtungen mit C-Magnet und R-Magnet bezeichnet.

Parameter	Wertebereich	Anzahl
Kabelpositionen	aufßen, mittig, rechtwinklig, u-förmig	4
Kabelenden	spitz, flach	2
Statisches Magnetfeld	C-Magnet, R-Magnet	2
Leitfähigkeit	0,2 S/m, 0,5 S/m, 1,0 S/m, 1,5 S/m	4
Frequenz	42,6 MHz, 63,9 MHz, 127,8 MHz	3
Pulsdauer	0,5 ms, 1,0 ms	2

**Tabelle 6.1:** Variierte Modellparameter der Kabelphantomstudie. Neben der Kabelposition und Form der Kabelenden wurde die Richtung des statischen Magnetfelds, die Leitfähigkeit der Salzlösung im Phantom, die Frequenz der HF-Pulse und die Pulsdauer verändert. Insgesamt ergaben sich so 384 verschiedene Parameterkombinationen.

Ein weiterer variiert Parameter war die Leitfähigkeit der Salzlösung im Phantom. In Anlehnung an die Leitfähigkeit von menschlichem Körpergewebe wurden Werte von 0,2 S/m, 0,5 S/m, 1,0 S/m und 1,5 S/m gewählt (vgl. Tabellen B.2, B.3 und B.4).

Die Frequenz der magnetischen HF-Pulse wurde entsprechend der Larmor-Bedingung (6.1) für statische Grundfeldstärken von 1,0 T, 1,5 T und 3,0 T auf 42,6 MHz, 63,9 MHz und 127,8 MHz festgelegt. Für die Dauer der HF-Pulse wurden 0,5 ms und 1,0 ms für einen 180°-Puls gewählt. Dies entspricht gemäß der Bedingung (6.2) transversalen Magnetfeldstärken von 11,7  $\mu$ T und 23,4  $\mu$ T.

Das gesamte Modell wurde in ein Gitternetz mit variablen Gitterabständen überführt, wobei an den Kabelspitzen eine Gitterauflösung von bis zu 0,5 mm verwendet wurde. Die Gitterstruktur wurde bei allen Modellen unabhängig von der tatsächlichen Kabelposition beibehalten, um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse nicht durch unterschiedliche geometrische Gitterstrukturen bei verschiedenen Kabelpositionierungen einzuschränken. Durch Kombination aller Parameter ergaben sich insgesamt 384 numerische Modelle mit jeweils ca. 300 000 Voxeln.

Das numerische Problem wurde zunächst im Frequenzbereich mit dem Modul W3 des Programm Paketes MAFIA gelöst, um den Energieverlust (*SAR*) an den Kabelenden im Modell zu bestimmen. Aus den berechneten elektrischen Feldern wurde die spezifische Absorptionsrate bestimmt und mit Hilfe der Schlimmsten-Falls-Abschätzung 4.8 beispielhaft für eine Kabelposition die obere Grenze für die zu erwartende Erwärmung an der Kabelspitze berechnet. Ausgehend von den abgeschätzten Temperaturwerten wurden für einige ausgesuchte Modelle zusätzliche Berechnungen mit dem thermodynamischen Algorithmus H3 durchgeführt. Diese dienten dazu, einen besseren Vergleich der berechneten Temperaturwerte mit experimentell bestimmten Erwärmungen zu ermöglichen.

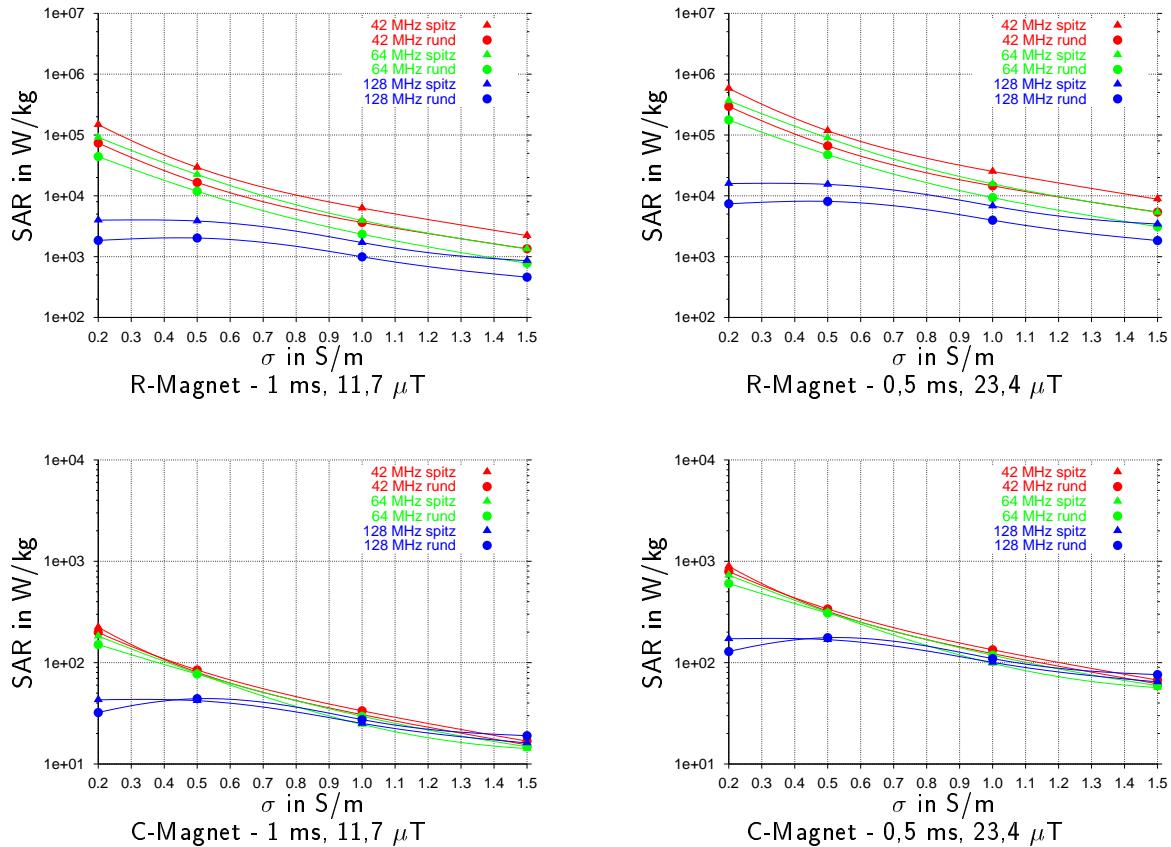
Tabelle 6.1 zeigt eine Übersicht mit allen variierten Modellparametern. Als relative Permittivität der Salzlösung wurde nach den Angaben von STOGRYN (1971) für jede Frequenz und Leitfähigkeit ein konstanter Wert von  $\epsilon_r = 78$  angenommen. Die dielektrischen Parameter für die Platin-Iridium-Legierung und die Kabelisolation aus PTFE (Polytetrafluoroethylen) finden sich in Tabelle B.4. Für die thermodynamische Betrachtung wurde von einer konstanten Ausgangstemperatur des Phantoms von 293 K ausgegangen. In Tabelle B.1 sind die weiteren notwendigen Materialparameter aufgeführt.

Im nächsten Abschnitt werden zunächst die Ergebnisse dieser numerischen Studie vorgestellt. Anschliessend werden verschiedene Darstellungen der elektrischen Feldverläufe im Inneren des Phantoms präsentiert und mit den in Abschnitt 6.2.4 abgeleiteten Näherungslösungen verglichen.

### 6.2.6 Numerische Ergebnisse der Kabelphantomstudie

In den Diagrammen der Abbildungen 6.5, 6.6, 6.7 und 6.8 sind die maximalen *SAR*-Werte an den Kabelenden aller numerischen Modelle über der Leitfähigkeit der Salzlösung aufgetragen. In jedem Diagramm sind 24 Einzelwerte gegeneinander aufgetragen, wobei jeweils vier der Maximalwerte einer Frequenz und Kabelspitzenform zugeordnet wurden.

Die vier Diagramme einer Abbildung repräsentieren eine der vier Kabelpositionen im Phantom und unterscheiden sich durch die Magnetbauform (R- oder C-Magnet) und die Pulsdauer der HF-Anregung (0,5 ms oder 1,0 ms). Die entsprechenden *SAR*-Werte befinden sich in den Tabellen 6.2, 6.3, 6.4 und 6.5.



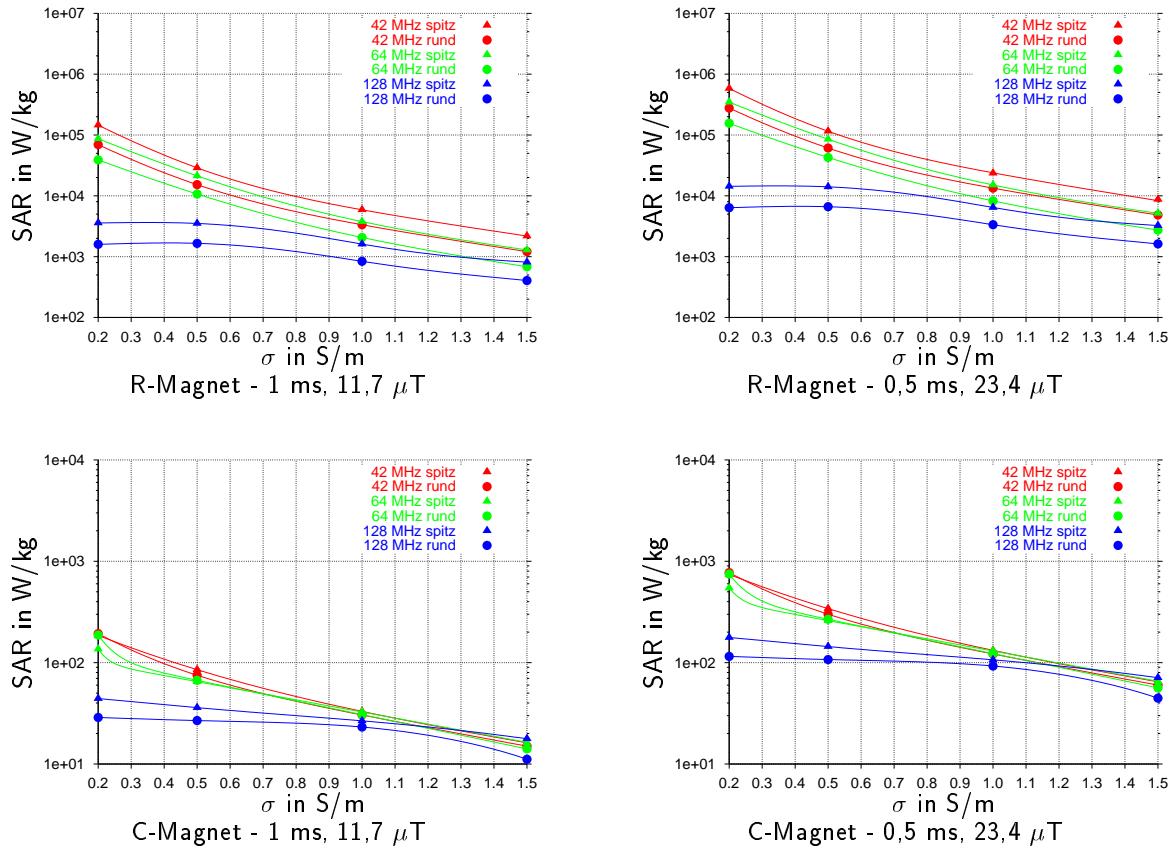
**Abbildung 6.5:** Abhängigkeit der maximalen spezifischen Absorptionsrate an den Kabelspitzen bei Modell 1 von der Leitfähigkeit der Salzlösung, der Frequenz, der HF-Pulsdauer, dem Magnettyp und der Kabelspitzenform.

Die numerischen Ergebnisse lassen einige grundlegende Zusammenhänge erkennen. Vergleicht man zunächst die Ergebnisse bei unterschiedlicher Grundfeldausrichtung, so zeigt sich bei allen Kabelpositionen, dass die maximale  $SAR$  in der R-Magnetkonfiguration zum Teil um einige Größenordnungen über den Werten der C-Magnetkonfiguration liegt. Besonders deutlich wird dies bei Modell 1 und 2 (vgl. mit Tabellen 6.2 und 6.3). Im Gegensatz dazu zeigen die Ergebnisse bei Modell 4 (vgl. mit Tabelle 6.5) nur geringe Unterschiede zwischen R- und C-Magnet.

Bei einem Vergleich der maximalen spezifischen Absorptionsrate an Kabeln mit flachen und spitzen Enden in der R-Magnetkonfiguration zeigt sich, dass sich bei spitzen Enden in den meisten Fällen bis auf die Kabelposition in Modell 4 eine doppelt so große Absorptionsrate im Vergleich zu den flachen Enden ergibt. Bei einem Vergleich der numerischen Ergebnisse bezüglich der Dauer des HF-Pulses erkennt man, dass nach Gleichung (6.2) bei halber Pulsdauer die doppelte Feldstärke notwendig ist und sich die deponierte Leistung vervierfacht.

Bei der C-Magnetkonfiguration konnte nur ein Zusammenhang zwischen maximaler  $SAR$  und Pulsdauer nachgewiesen werden. Bei spitzen Kabelenden liegt die maximale Absorptionsrate auch über der bei flachen Kabelenden, allerdings unterscheiden sich die Werte nicht um ungefähr den Faktor zwei wie bei der R-Magnetkonfiguration.

Die Abhängigkeit der maximalen Absorptionsrate von der Leitfähigkeit der Salzlösung zeigt in



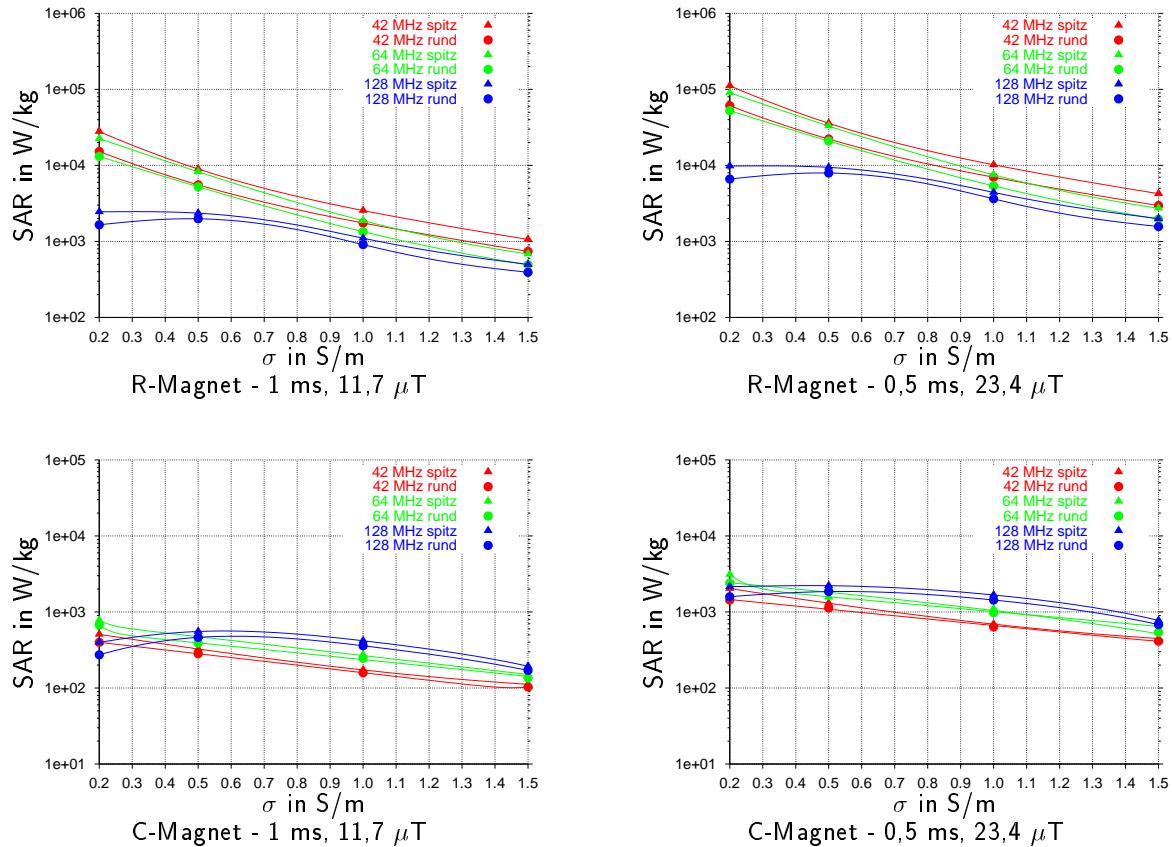
**Abbildung 6.6:** Abhängigkeit der maximalen spezifischen Absorptionsrate an den Kabelspitzen bei Modell 2 von der Leitfähigkeit der Salzlösung, der Frequenz, der HF-Pulsdauer, dem Magnettyp und der Kabelspitzenform.

fast allen betrachteten Fällen ein ähnliches Verhalten. Bei zunehmender Leitfähigkeit sinkt die maximale Absorptionsrate an den Kabelenden. Lediglich bei einer Feldfrequenz von 127,8 MHz gibt es zwischen 0,2 S/m und 0,5 S/m einen leichten Anstieg der spezifischen Absorptionsrate, bevor dieser Wert bei zunehmender Leitfähigkeit wieder abnimmt (vgl. Abbildung 6.5, 6.6 und 6.7).

Betrachtet man die Abhängigkeit der Absorptionsrate von der Feldfrequenz, so erkennt man, dass bei niedrigeren Frequenzen größere Absorptionsraten an den Kabelenden beobachtet werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die maximale spezifische Absorptionsrate umso größer ist, je geringer die Leitfähigkeit der Salzlösung, je kleiner die Feldfrequenz und je kürzer die Pulsdauer ist. Darüber hinaus ergeben sich bei der R-Magnetkonfiguration und spitzerem Kabelende höhere Absorptionsraten als in allen anderen betrachteten Konfigurationen. Die maximale *SAR* wurde daher bei Modell 1 bei einer Leitfähigkeit von 0,2 S/m, einer Pulsdauer von 0,5 ms und einer Feldfrequenz von 42,6 MHz am spitzen Kabelende in R-Magnetkonfiguration beobachtet (vgl. Tabelle 6.2).

Die Abbildungen 6.9 und 6.10 zeigen die spezifische Absorptionsrate in einem Schnitt durch die Mitte von Modell 1 in der *xy*-Ebene bei flachem Kabelende und einer HF-Pulsdauer von 1,0 ms



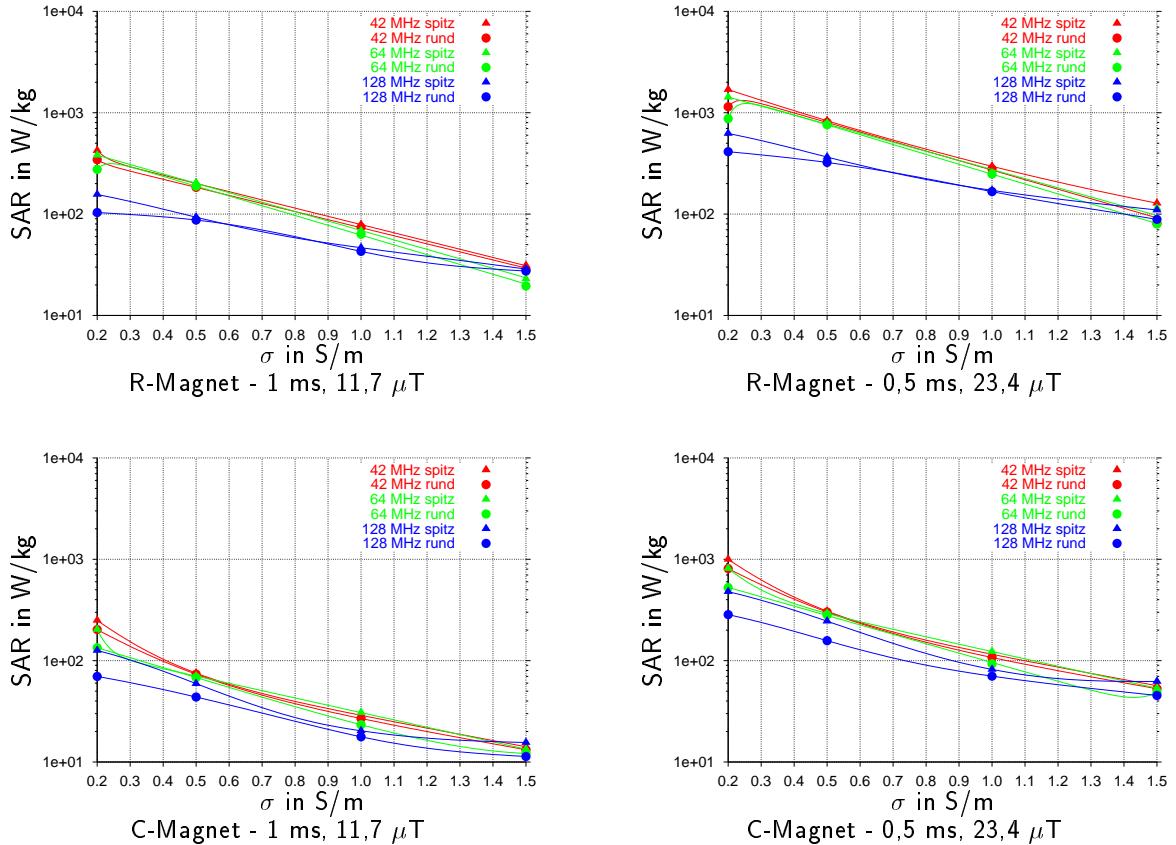
**Abbildung 6.7:** Abhängigkeit der maximalen spezifischen Absorptionsrate an den Kabelspitzen bei Modell 3 von der Leitfähigkeit der Salzlösung, der Frequenz, der HF-Pulsdauer, dem Magnettyp und der Kabelspitzenform.

in Abhängigkeit von der Feldfrequenz und der Leitfähigkeit der Salzlösung. Beide Abbildungen unterscheiden sich nur durch die Richtung des magnetischen Grundfelds (R- oder C-Magnet).

In Abbildung 6.9 zeigt sich bei R-Magnetkonfiguration, dass bei allen Feldfrequenzen bei Zunahme der Leitfähigkeit der Salzlösung die spezifische Absorptionsrate im Inneren des Phantoms um mehrere Größenordnungen abfällt. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes wurde die Farbskala logarithmisch gewählt, um so eine größere Dynamik bei der Farbgebung zu erhalten. Bei einer Leitfähigkeit von 0,2 S/m sind je nach Feldfrequenz komplexere Amplitudenmuster zu erkennen und nicht nur ein reiner exponentieller Abfall.

Ähnliche Zusammenhänge zeigt Abbildung 6.10, welches die spezifische Absorptionsrate bei der C-Magnetkonfiguration wiedergibt. Überraschend ist hier zunächst, dass die maximale Absorptionsrate nicht immer an den Kabelenden beobachtet werden kann, wie das bei der R-Magnetkonfiguration in Abbildung 6.9 der Fall ist. Es zeigt sich darüber hinaus eine leichte Drehung der SAR-Verteilung um die z-Achse, was auf eine Phasenverschiebung des resultierenden elektrischen Feldes durch die induzierten Wirbelströme zurückzuführen ist. Auch hier wurde die logarithmische Farbskala verwendet mit identischer Achsenkalierung beider Abbildungen, um einen direkten Vergleich der Ergebnisse zu ermöglichen.

Abbildung 6.11 vergleicht die maximale SAR zwischen flachen und spitzen Kabelenden in



**Abbildung 6.8:** Abhängigkeit der maximalen spezifischen Absorptionsrate an den Kabelspitzen bei Modell 4 von der Leitfähigkeit der Salzlösung, der Frequenz, der HF-Pulsdauer, dem Magnettyp und der Kabelspitzenform.

Abhängigkeit der Leitfähigkeit der Salzlösung bei Modell 2 (R-Magnet, 63,9 MHz, 0,5 ms Pulsdauer). Wie bereits in Abbildung 6.6 zu sehen ist, nimmt bei beiden Kabelendenformen die SAR bei zunehmender Leitfähigkeit der Salzlösung ab. Eine Differenzbildung der jeweiligen SAR-Verteilungen wie in den rechten beiden Spalten von Abbildung 6.11 verdeutlicht die Tatsache, dass an spitzen Kabelenden höhere SAR-Werte erreicht werden..

Abbildung 6.12 zeigt diesen Effekt in einer dreidimensionalen Darstellung der Stromdichteverteilung am spitzen und flachen Kabelende. Die Größe der Pfeile ist beim flachen Kabelende überall nahezu konstant und zeigt eine relativ gleichmäßige Verteilung der Stromdichte. Am spitzen Kabelende sind die Pfeile an der Spitze größer als am flachen Kabelende. Dadurch werden die höheren berechneten SAR-Werte an spitzen Kabelenden noch einmal verdeutlicht.

In Abschnitt 6.2.4 wurde mit Gleichung (6.38) eine Möglichkeit abgeleitet, die Amplitude des elektrischen Feldes in einem quaderförmigen Salzwasserphantom näherungsweise zu berechnen. Anhand der Ergebnisse der numerischen Untersuchungen kann die Näherungslösung auf ihre Gültigkeit hin untersucht werden.

Im Falle der numerischen Modelle entspricht die C-Magnetkonfiguration in der Ausrichtung des statischen Magnetfelds der für die theoretische Abschätzung verwendeten Konfiguration nach Abbildung 6.3. Als Vergleichsergebnisse werden zunächst die numerischen Resultate von

Typ	$t_p$ ms	$\sigma$ S/m	Kabelende spitz			Kabelende flach			
			42,6 MHz	63,9 MHz	127,8 MHz	42,6 MHz	63,9 MHz	127,8 MHz	
R	1,0	0,2	147 959	91 363	3 978	73 767	44 170	1 846	
		0,5	29 329	22 356	3 850	16 614	11 882	2 023	
		1,0	6 276	3 930	1 700	3 644	2 336	993	
		1,5	2 223	1 338	857	1 348	778	459	
	0,5	0,2	584 158	365 454	15 914	295 071	176 680	7 385	
		0,5	117 319	89 427	15 403	66 457	47 528	8 094	
		1,0	25 106	15 723	6 803	14 579	9 347	3 975	
		1,5	8 892	5 352	3 431	5 395	3 112	1 838	
	1,0	0,2	223	183	43	198	151	32	
		0,5	80	78	42	85	77	44	
		1,0	30	26	25	33	30	27	
		1,5	15	14	16	17	15	19	
C	0,5	0,2	894	730	172	794	604	129	
		0,5	321	313	169	338	309	176	
		1,0	123	98	101	134	118	110	
		1,5	62	57	65	67	59	76	

**Tabelle 6.2:** Maximale berechnete SAR-Werte in W/kg an den Kabelenden in Modell 1 in Abhängigkeit vom verwendeten MRT-Magnettyp, der Pulsdauer, der Leitfähigkeit der Salzlösung, der Kabelendenform und der Frequenz des HF-Feldes.

Modell 4 verwendet, bei dem das Kabel genau in der Phantommitte parallel zur  $y$ -Achse verläuft und damit einer Simulation eines Phantoms ohne Kabel am nächsten kommt.

In Abbildung 6.13 sind in sechs Diagrammen die Feldverläufe einzelner Betragkomponenten der elektrischen Feldamplitude im Inneren des Phantoms entlang der  $x$ - und der  $z$ -Achse durch den Mittelpunkt des Phantoms<sup>1</sup> bei unterschiedlicher Frequenz und Leitfähigkeit der Salzlösung aufgetragen. Wie von Gleichung (6.38) gefordert, ergibt sich die Feldamplitude im Koordinatenursprung  $(0, 0, 0)$  in jedem Fall zu Null.

Es ist möglich, die berechneten Komponenten der Feldamplitude mit der Lösung aus Gleichung (6.38) zu vergleichen. Dazu müssen nur die Parameter  $k'$  und  $k''$  mit Hilfe von Gleichung (6.13) und (6.14) berechnet werden. Die Konstante  $C$ , sowie die Koeffizienten  $A_{x,y,z,1}$  können dann mit Hilfe eines Regressionsverfahrens bestimmt werden, da für sie keine expliziten Gleichungen abgeleitet wurden. Die Werte für die Konstanten  $k'$  und  $k''$  sind in Tabelle 6.6 aufgeführt.

In Abbildung 6.13 wurde die Näherungslösung nach Gleichung (6.38) den Ergebnissen der numerischen Berechnung als durchgezogene Linien überlagert. Dabei wurde die Feldstärke immer entlang der Koordinatenachsen durch den Ursprung dargestellt. Die Kosinusterme in Gleichung (6.38) ergeben sich dadurch zu eins. Die Näherungslösung liefert ab einer Salzwasserleitfähigkeit

<sup>1</sup>Der Phantommittelpunkt liegt hier genau im Koordinatenursprung

Typ	$t_p$ ms	$\sigma$ S/m	Kabelende spitz			Kabelende flach		
			42,6 MHz	63,9 MHz	127,8 MHz	42,6 MHz	63,9 MHz	127,8 MHz
R	1,0	0,2	145 336	86 754	3 578	69 402	39 001	1 592
		0,5	28 844	21 290	3 513	15 273	10 699	1 654
		1,0	5 891	3 768	1 608	3 342	2 065	838
		1,5	2 181	1 288	810	1 210	682	404
	0,5	0,2	582 543	347 018	14 314	277 609	156 004	6 369
		0,5	115 376	85 162	14 055	61 094	42 799	6 618
		1,0	23 5647	15 074	6 433	13 371	8 261	3 351
		1,5	8 725	5 153	3 242	4 840	2 731	1 619
C	1,0	0,2	185	136	44	193	186	28
		0,5	85	64	36	75	66	26
		1,0	33	32	26	30	30	23
		1,5	16	16	17	15	14	11
	0,5	0,2	742	544	177	773	747	115
		0,5	341	259	144	300	267	107
		1,0	132	131	106	121	122	92
		1,5	64	64	71	60	56	44

**Tabelle 6.3:** Maximale berechnete SAR-Werte in W/kg an den Kabelenden in Modell 2 in Abhängigkeit vom verwendeten MRT-Magnettyp, der Pulsdauer, der Leitfähigkeit der Salzlösung, der Kabelendenform und der Frequenz des HF-Feldes.

von 0,5 S/m eine sehr gute Übereinstimmung mit den numerisch ermittelten Amplitudenwerten. Bei einer Leitfähigkeit von 0,2 S/m zeigen sich teilweise deutliche Abweichungen zwischen der Näherungslösung und den berechneten Werten, da durch die geringe Dämpfung, wie in Abschnitt 6.2.4 beschrieben, die Reflexionen an den Phantomrändern nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

Abbildung 6.14 bestätigt die erarbeitete Näherungslösung (6.38) aus Abschnitt 6.2.4.2 an den Ergebnissen von Modell 4 bei 42,6 MHz, 1,0 S/m und einer Pulsdauer von 1,0 ms. Im Gegensatz zu Abbildung 6.13 wurden hier Rechenergebnisse der R-Magnetkonfiguration dargestellt. Dadurch ändern sich die Koordinatenabhängigkeiten in Gleichung (6.24) etwas. Die in der Abbildung dargestellte  $x$ -Komponente des elektrischen Feldes ist in diesem Fall neben der  $x$ - auch von der  $y$ -Koordinate statt von  $z$  abhängig. Gleichung (6.38) gilt analog.

In der Abbildung wird deutlich, dass sich der Feldverlauf in der Nähe des Phantomrandes allein durch Berücksichtigung des ersten Summanden der Reihenentwicklung (6.35) sehr gut darstellen lässt. In der Phantommitte gilt diese Näherung nicht mehr. Dann müssen eine größere Anzahl an Konsinustermen berücksichtigt werden.

Die Veränderung der Amplitude der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes in Abhängigkeit der Leitfähigkeit der Salzlösung ist in Abbildung 6.15 dargestellt (Modell 4, 63,9 MHz, Schnitt

Typ	$t_p$ ms	$\sigma$ S/m	Kabelende spitz			Kabelende flach			
			42,6 MHz	63,9 MHz	127,8 MHz	42,6 MHz	63,9 MHz	127,8 MHz	
R	1,0	0,2	27872	22526	2451	15254	13142	1654	
		0,5	89675	8246	2356	5552	5239	1986	
		1,0	2549	1876	1103	1748	1344	907	
		1,5	1062	682	497	740	492	391	
	0,5	0,2	111490	90107	9806	61017	52570	6616	
		0,5	35868	32984	9425	22208	20959	7945	
		1,0	10198	7506	4413	6993	5376	3631	
		1,5	4249	2731	1989	2960	1971	1567	
C	1,0	0,2	508	778	397	398	675	272	
		0,5	326	470	553	282	389	463	
		1,0	172	274	418	158	244	359	
		1,5	111	144	193	103	135	170	
	0,5	0,2	2032	3113	2150	1436	2397	1588	
		0,5	1304	1558	2214	1129	1883	1854	
		1,0	691	1096	1672	635	979	1436	
		1,5	447	578	772	412	540	681	

**Tabelle 6.4:** Maximale berechnete SAR-Werte in W/kg an den Kabelenden in Modell 3 in Abhängigkeit vom verwendeten MRT-Magnettyp, der Pulsdauer, der Leitfähigkeit der Salzlösung, der Kabelendenform und der Frequenz des HF-Feldes.

in der  $xy$ -Ebene durch die Phantommitte) und ergänzt dadurch die Darstellung in Abbildung 6.13. Durch die zunehmende Dämpfung bei Zunahme der Leitfähigkeit stellt sich mehr und mehr ein exponentieller Verlauf der Feldamplitude im Inneren des Phantoms ein, da dann der Dämpfungsanteil in Form der hyperbolischen Kosinusfunktionen in Gleichung (6.38) im Vergleich zu den Kosinusanteilen überwiegt.

Da in den experimentellen Studien in erster Linie die Erwärmung an der Kabel- oder Elektroden spitze gemessen wird, erscheint es sinnvoll für einige SAR-Werte die mögliche Erwärmung abzuschätzen. Mit Hilfe der einfachen Abschätzung nach Gleichung (4.8) lässt sich so eine obere Grenze für die zu erwartende Erwärmung angeben.

Da bei Modell 1 in der R-Magnetkonfiguration die größten SAR-Werte ermittelt werden konnten, wurden diese Werte für die Temperaturabschätzung verwendet. Bei der Berechnung der Erwärmung sind die SAR-Werte aber noch an das Puls-Pausenverhältnis einer fiktiven MR-Sequenz anzupassen, da bei der MR-Tomographie das Hochfrequenzfeld gepulst eingestrahlt wird und sich an einen HF-Puls stets eine gewisse Pausenzeit anschließt. Addiert man die Dauer aller Hochfrequenzpulse und setzt diese zur Gesamtdauer der MR-Sequenz ins Verhältnis, so ergibt sich das Puls-Pausenverhältnis, mit dem die SAR-Werte modifiziert werden müssen.

Betrachtet man eine MR-Sequenz so ist die Repetitionszeit und die in dieser Zeitspanne enthal-

Typ	$t_p$ ms	$\sigma$ S/m	Kabelende spitz			Kabelende flach		
			42,6 MHz	63,9 MHz	127,8 MHz	42,6 MHz	63,9 MHz	127,8 MHz
R	1,0	0,2	422	380	156	344	275	103
		0,5	200	204	93	183	188	87
		1,0	78	68	46	74	63	42
		1,5	31	22	28	28	19	27
	0,5	0,2	1 691	1 422	624	1 144	875	422
		0,5	833	783	365	800	760	323
		1,0	296	253	171	27	248	166
		1,5	128	114	109	81	79	88
	1,0	0,2	249	203	126	202	134	69.84
		0,5	75	70	59	73	68	43.74
		1,0	28	30	20	26	23	17.73
		1,5	14	13	15	13	12	11.33
C	0,5	0,2	998	812	479	809	526	284
		0,5	308	292	244	301	281	157
		1,0	115	123	81	107	93	70
		1,5	56	53	62	52	48	45

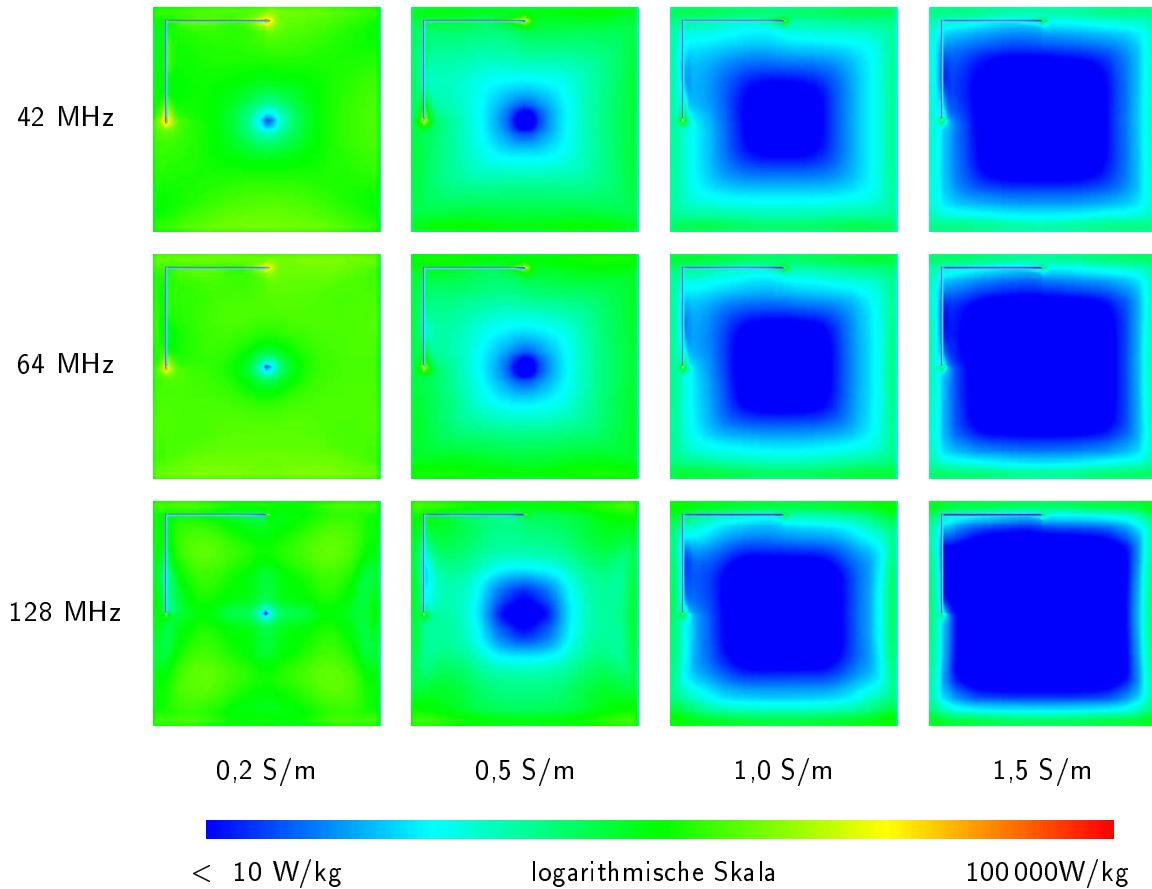
**Tabelle 6.5:** Maximale berechnete SAR-Werte in W/kg an den Kabelenden in Modell 4 in Abhängigkeit vom verwendeten MRT-Magnettyp, der Pulsdauer, der Leitfähigkeit der Salzlösung, der Kabelendenform und der Frequenz des HF-Feldes.

tenen HF-Pulse von Interesse, da sie den HF-Anteil einer Sequenz ausmachen (MORNEBURG, 1995). Im folgenden wird eine fiktive MR-Sequenz angenommen, die über einen HF-Anteil von 1,0 % verfügt und damit einen vernünftigen Vergleichswert für eine hohe HF-Belastung darstellt. Ausgehend von diesem HF-Anteil wurden die SAR-Werte angepasst und die Erwärmung an der Elektrodenspitze abgeschätzt. Die Ergebnisse dieser Berechnung finden sich in Tabelle 6.7.

Wie aus Tabelle 6.7 zu sehen ist, steigen die Temperaturen linear mit der Zeit an und damit über alle Grenzen, was bei langen MR-Sequenzdauern zu unverhältnismäßig großen Erwärmungen führt. Betrachtet man den Fall des spitzen Kabelendes bei einem HF-Anteil von 1,0 % und einer Leitfähigkeit von 0,2 S/m bei einer Frequenz von 42,6 MHz, so ergibt sich aus der SAR eine obere Grenze für die Erwärmung von 1,397 K/s.

Bei einer fiktiven MR-Sequenz mit einer Dauer von 2 500 s würde sich damit eine maximale Erwärmung von 3 492,5 K ergeben, was so nicht möglich ist. Eine Berechnung der Erwärmung mit Hilfe der einfachen Abschätzung nach Gleichung (4.8) liefert hier eine sichere obere Grenze, die jedoch keinen brauchbaren Hinweis auf die tatsächlich auftretende Erwärmung liefert.

Aus diesem Grund wurde mit Hilfe des thermodynamischen Algorithmus für drei Fälle die Erwärmung am Kabel mit spitzen Enden von Modell 1 während einer MR-Sequenz mit einem HF-Anteil von 1,0 % berechnet. Neben der oben angegebenen Frequenz von 42,6 MHz wur-



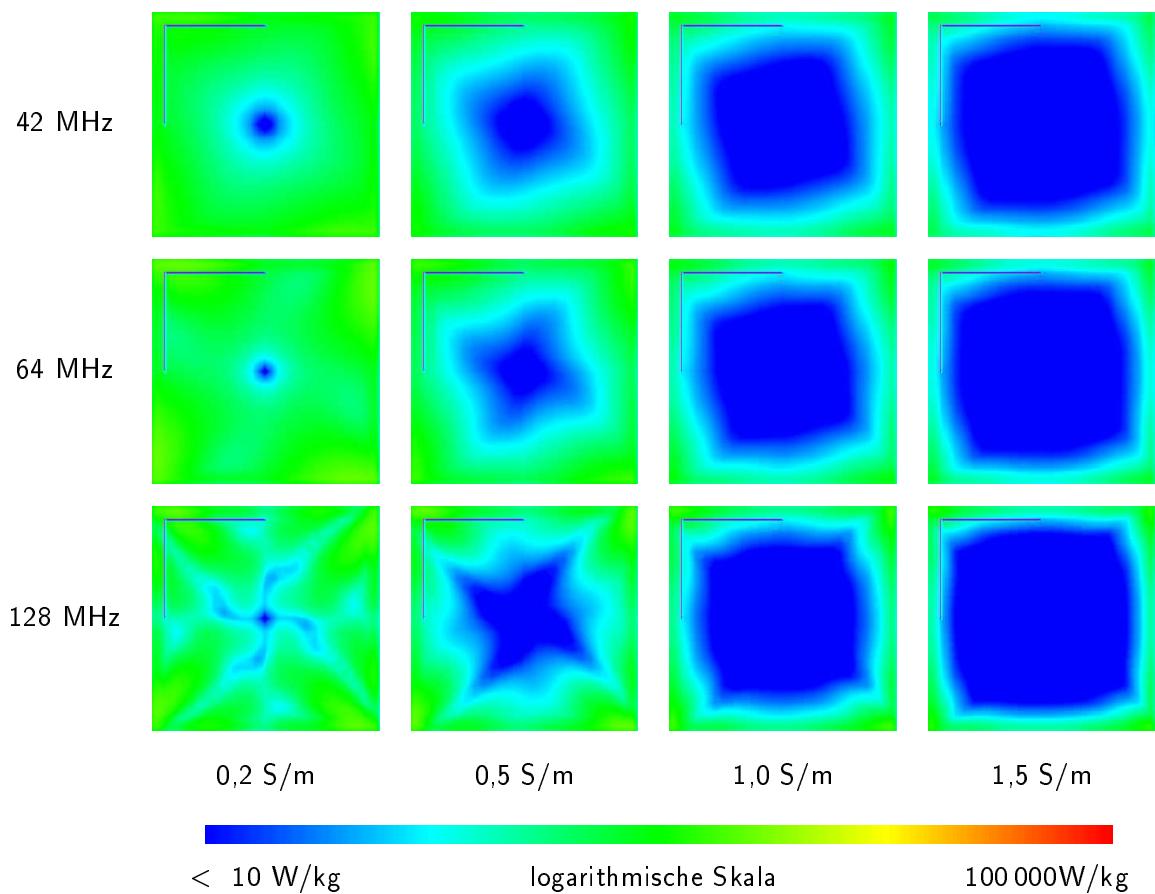
**Abbildung 6.9:** Spezifische Absorptionsrate in Modell 1 in der Salzlösung und an den Kabelenden in Abhängigkeit von der Leitfähigkeit der Salzlösung und der Frequenz bei flachem Kabelende und 1 ms Pulsdauer im R-Magneten (Schnitt in der xy-Ebene, logarithmische Farbskala).

den auch für die *SAR*-Werte von 63,9 MHz und 127,8 MHz die Erwärmungen berechnet. Die Simulation wurde für einen Zeitraum von 2500 s durchgeführt.

In Abbildung 6.16 sind die Temperaturverläufe an der Kabelspitze wiedergegeben. Wie aus den *SAR*-Werten zu erwarten war, wird bei einer Frequenz von 42,6 MHz die maximale Temperaturzunahme beobachtet. Die Temperatur steigt hier vom Ausgangswert 293,0 K auf 333,3 K an, was einer Erwärmung von 40,3 K entspricht. Bei 63,9 MHz wird eine Erwärmung von 28,9 K erzielt und bei 127,8 MHz lediglich von 3,6 K.

Die einfache Abschätzung überschätzt in allen drei Fällen mit Temperaturzunahmen von 3 493 K, 2 185 K und 95 K die Werte des thermodynamischen Algorithmus um mehrere Größenordnungen. Die Wärmeleitung in der Salzlösung sorgt für einen raschen Wärmeabtransport vom Kabelende in die umgebende Flüssigkeit und damit für deutlich niedrigere Endtemperaturen.

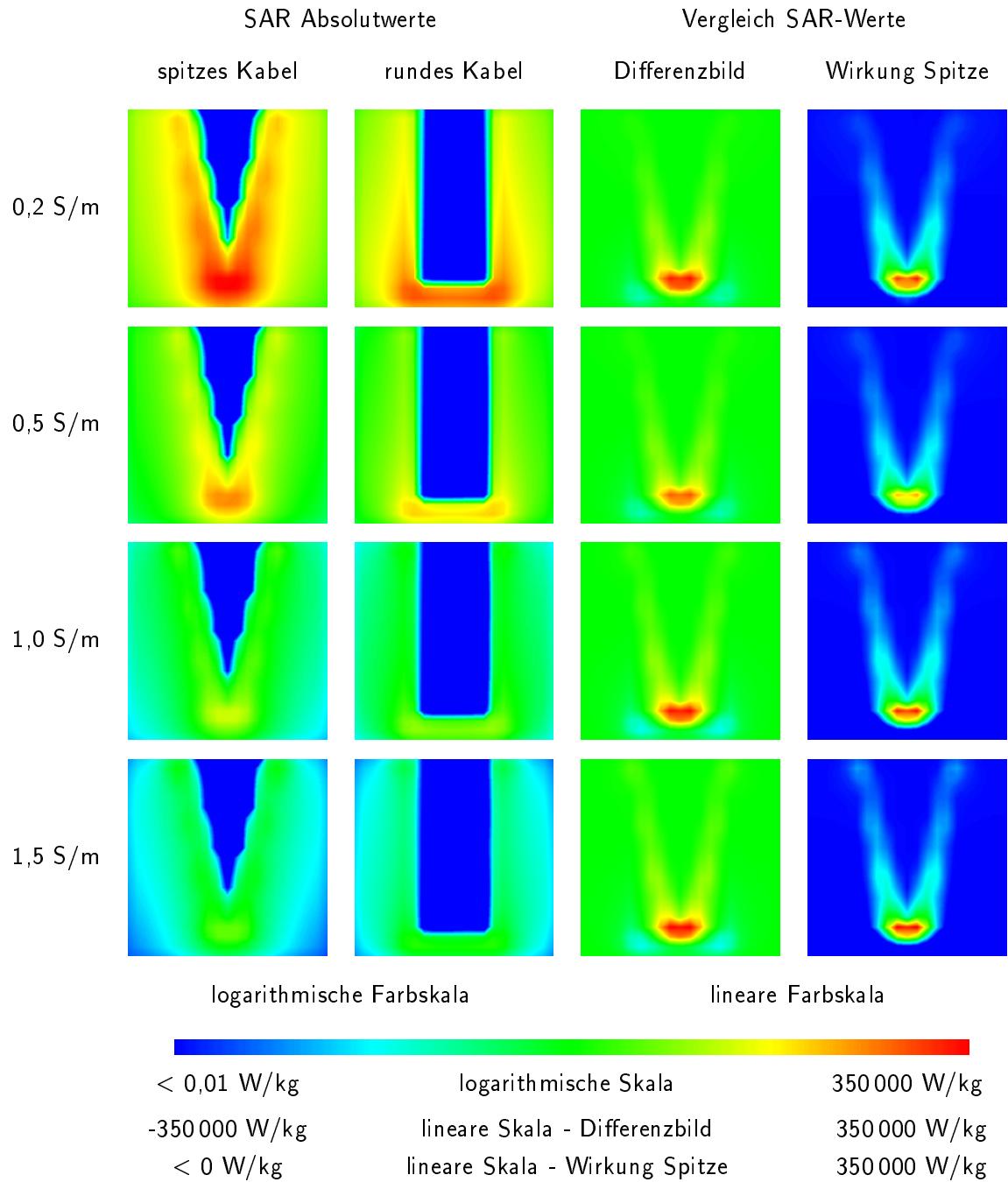
Abbildung 6.17 zeigt die Endtemperaturverteilung in einem Schnittbild durch die Mitte von Modell 1 nach 2 500 s Dauer der fiktiven MR-Sequenz für alle drei berücksichtigten Frequenzen bei einer HF-Pulsdauer von 0,5 ms und einer Leitfähigkeit von 0,2 S/m. Bei 42,6 MHz ist deutlich zu sehen, wie sich um die Kabelspitze eine keulenförmige Erwärmungszone bildet. Dies kann auch bei 63,9 MHz beobachtet werden. Bei 127,8 MHz liegen die Maxima der Feldamplitude



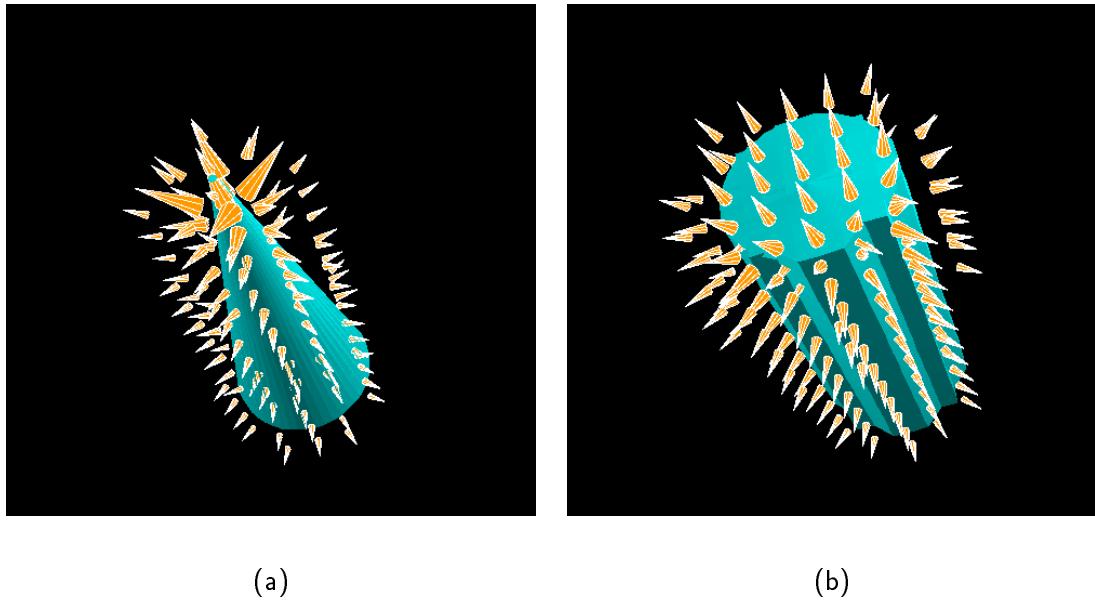
**Abbildung 6.10:** Spezifische Absorptionsrate in Modell 1 in der Salzlösung und an den Kabelenden in Abhängigkeit von der Leitfähigkeit der Salzlösung und der Frequenz bei flachem Kabelende und 1 ms Pulsdauer im C-Magneten (Schnitt in der xy-Ebene, logarithmische Farbskala).

aufgrund der Reflexionen am Rand des Phantoms nicht an den Kabelenden. In diesem Fall liegt der Punkt maximaler Erwärmung nicht an der Kabelspitze, wie bei den anderen Feldfrequenzen.

Einige Ergebnisse der Kabelphantomstudie wurden bereits veröffentlicht (GOLOMBECK & DÖSSEL, 2003).



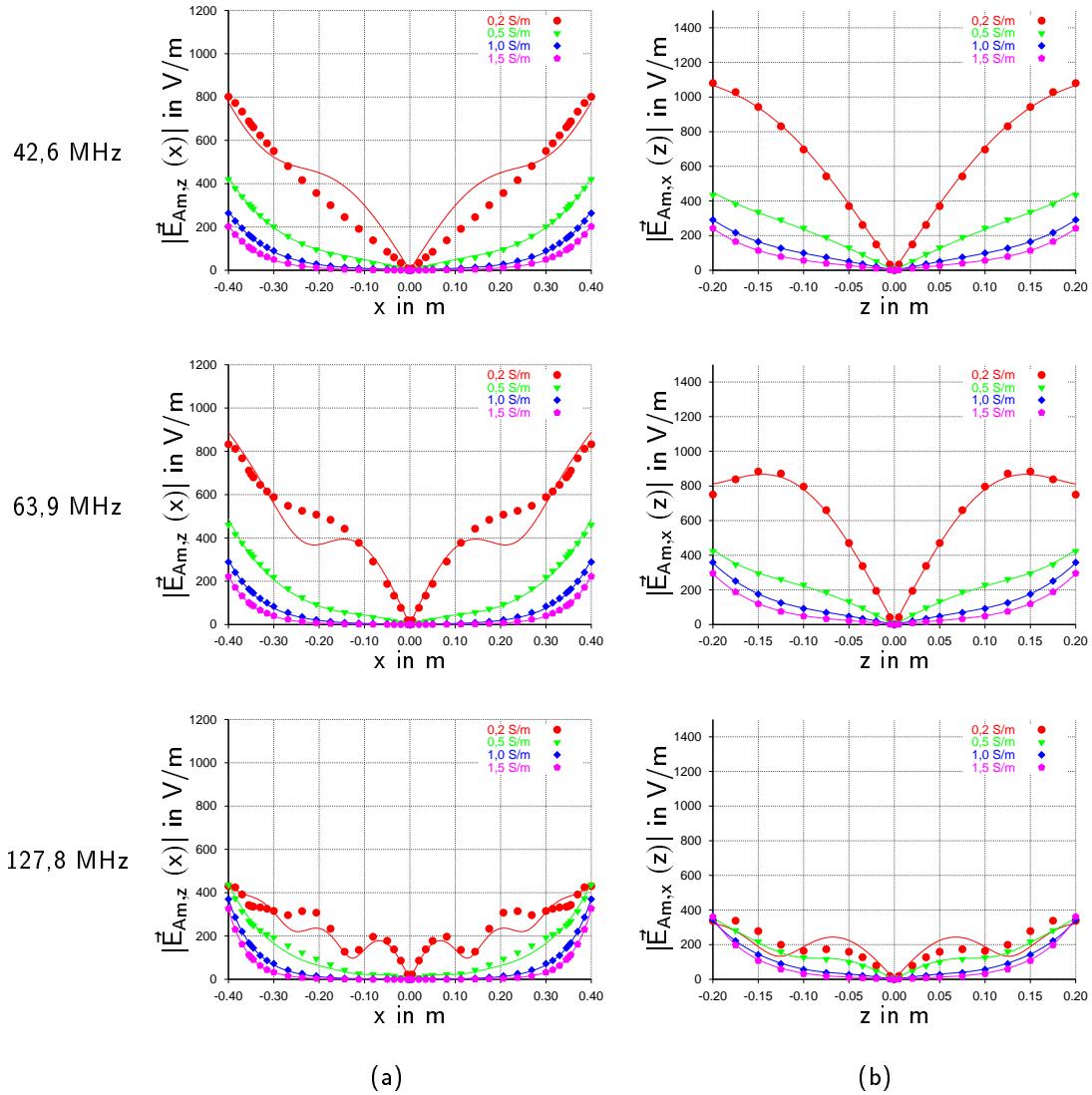
**Abbildung 6.11:** Vergleich der spezifischen Absorptionsrate zwischen spitzem und flachem Kabelende bei Modell 2 und unterschiedlichen Leitfähigkeiten der Salzlösung (R-Magnet, 63,9 MHz, 0,5 ms Pulsdauer). Die Bilder der beiden linken Spalten zeigen die Absolutwerte der Absorptionsrate an den Kabelenden mit logarithmischer Farbskala. Die Spalten der rechten Seite zeigen die Ergebnisse einer Differenzbildung zwischen der Absorptionsrate bei spitzem Kabelende und der Absorptionsrate bei flachem Kabelende mit linearer Farbskala. Bei der äußersten rechten Spalte wurde die lineare Farbskala auf positive Differenzwerte normiert, um die Wirkung des spitzen Kabelendes zu verdeutlichen.



**Abbildung 6.12:** Vergleich der Stromdichteverteilung am spitzen und flachen Kabelende. Bei spitzem Kabelende kommt es zu einer Erhöhung der Stromdichtewerte an der Kabelspitze, die beim flachen Kabelende nicht beobachtet werden kann.

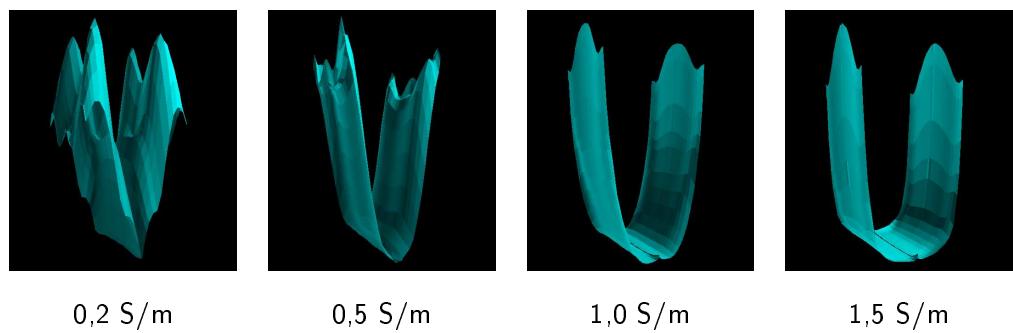
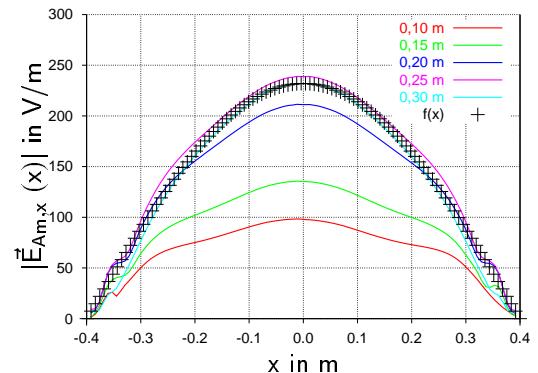
Leitfähigkeit	42,6 MHz	63,9 MHz	127,8 MHz
$k'$	0,2 S/m	$8,74 \cdot 1/s$	$12,48 \cdot 1/s$
	0,5 S/m	$10,96 \cdot 1/s$	$14,61 \cdot 1/s$
	1,0 S/m	$14,18 \cdot 1/s$	$18,18 \cdot 1/s$
	1,5 S/m	$16,84 \cdot 1/s$	$21,29 \cdot 1/s$
$k''$	0,2 S/m	$3,83 \cdot 1/s$	$4,03 \cdot 1/s$
	0,5 S/m	$7,63 \cdot 1/s$	$8,60 \cdot 1/s$
	1,0 S/m	$11,80 \cdot 1/s$	$13,82 \cdot 1/s$
	1,5 S/m	$14,90 \cdot 1/s$	$17,71 \cdot 1/s$

**Tabelle 6.6:** Werte für die Konstanten  $k'$  und  $k''$  für die Näherungslösung nach Gleichung (6.38) zur Berechnung der elektrischen Feldamplitude in einem quaderförmigen Salzwasserphantom in Abhängigkeit der Leitfähigkeit der Salzlösung und der Feldfrequenz. Die relative Permittivität der Salzlösung wurde mit  $\epsilon_r = 78$  als konstant angenommen.



**Abbildung 6.13:** Absolutbetrag bzw. Amplitude der x- und z-Komponente des elektrischen Feldes im Salzwasserphantom (Punkte) und Vergleich mit der Näherungslösung (durchgezogene Linien) bei Modell 4 (C-Magnet). Die Diagramme in Spalte (a) zeigen den Verlauf der z-Komponente entlang der x-Achse bei unterschiedlichen Frequenzen und Leitfähigkeiten der Salzlösung. Der Verlauf der x-Komponente entlang der z-Achse wird in den Diagrammen von Spalte (b) wiedergegeben. Bei niedriger Leitfähigkeit der Salzlösung nimmt die Dämpfung im Phantom ab und es ergeben sich aufgrund von Reflexionen Abweichungen zwischen der Näherungslösung und den berechneten Feldverläufen.

**Abbildung 6.14:** Absolutbetrag der x-Komponente des elektrischen Feldes bei Modell 1 (R-Magnet) entlang der x-Achse in unterschiedlichen Entfernungen vom Ursprung (y-Abstand variabel,  $z = 0$ ). Je größer der Abstand zum Ursprung gewählt wird, desto besser wird der Feldverlauf von der Näherungslösung  $f(x)$  nach Gleichung (6.38) wiedergegeben (schwarze Kreuze).

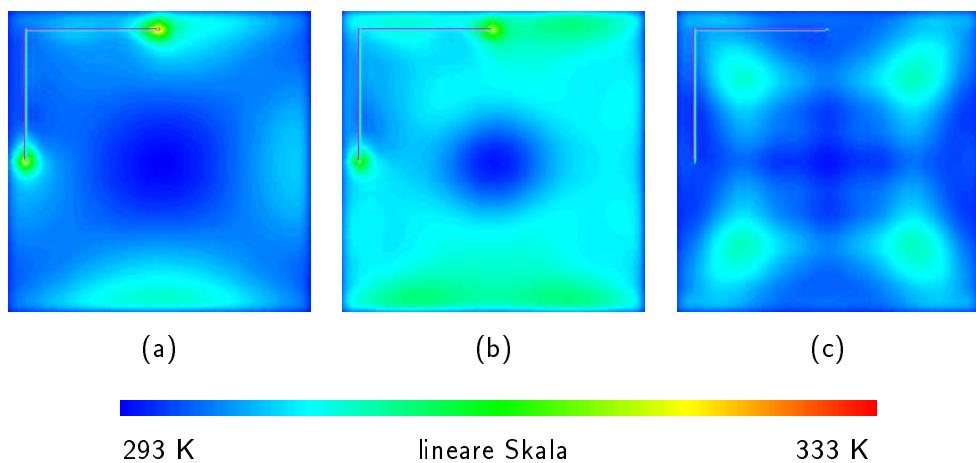
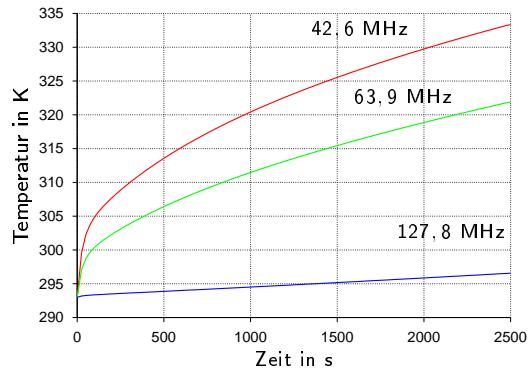


**Abbildung 6.15:** Amplitudenbetrag der z-Komponente des elektrischen Feldes in Modell 4 bei 63,9 MHz im C-Magneten in Abhängigkeit der Leitfähigkeit der Salzlösung (Schnitt durch die xz-Ebene). Die Bilder zeigen, dass bei zunehmender Leitfähigkeit die Reflexionen am Rand des Phantoms abnehmen und sich durch die zunehmende Dämpfung ein exponentieller Verlauf der Amplitude im Inneren des Phantoms einstellt.

Anteil	$t_p$ ms	$\sigma$ S/m	Kabelende spitz			Kabelende flach		
			42,6 MHz	63,9 MHz	127,8 MHz	42,6 MHz	63,9 MHz	127,8 MHz
1,0 %	1,0	0,2	0,354	0,218	0,010	0,176	0,106	0,004
		0,5	0,070	0,053	0,009	0,040	0,028	0,005
		1,0	0,015	0,009	0,004	0,009	0,006	0,002
		1,5	0,005	0,003	0,002	0,003	0,002	0,001
	0,5	0,2	1,397	0,874	0,038	0,706	0,422	0,018
		0,5	0,281	0,214	0,037	0,159	0,114	0,019
		1,0	0,060	0,038	0,016	0,035	0,022	0,010
		1,5	0,021	0,013	0,008	0,013	0,007	0,004

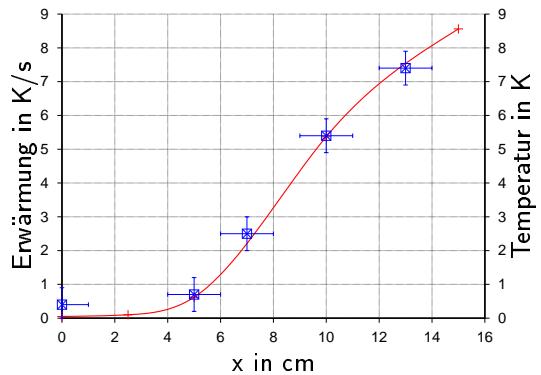
**Tabelle 6.7:** Einfache Abschätzung der Erwärmung in K/s an der Kabelspitze von Modell 1 (R-Magnet) gemäß Gleichung (4.8). Ausgehend vom Puls-Pausenverhältnis einer MR-Sequenz ist der in Tabelle 6.2 angegebene Spitzen-SAR-Wert anzupassen und auf einen gemittelten SAR-Wert umzurechnen. Bei den hier angegebenen Werten wird von einem Hochfrequenzanteil von 1,0 % an der Gesamtaufnahmedauer ausgegangen, was einer hochfrequenzintensiven MR-Sequenz entspricht.

**Abbildung 6.16:** Erwärmung der Kabelspitze von Modell 1 bei  $0,2 \text{ S/m}$  und spitzem Kabelende während einer MR-Sequenz von 2500 s Dauer mit einem HF-Anteil von 1,0 % und einer Pulsdauer von 0,5 ms bei 42,6 MHz (rote Kurve), 63,9 MHz (grüne Kurve) und 127,8 MHz (blaue Kurve). Die Endwerte der Temperatur an der Kabelspitze liegen am Simulationsende um einige Größenordnungen unter den Schlimmsten-Falls-Abschätzung aus Tabelle 6.7.



**Abbildung 6.17:** Temperaturverteilung an der Kabelspitze von Modell 1 nach einer simulierten MR-Sequenz von 2500 s Dauer, bei einer Leitfähigkeit von  $0,2 \text{ S/m}$ , einer Pulsdauer von 0,5 ms und einem HF-Anteil von 1,0 % bei verschiedenen Frequenzen. Bild (a) zeigt die Temperaturverteilung bei einer Feldfrequenz von 42,6 MHz, bei der die maximale Erwärmung von 293,0 K auf 333,3 K beobachtet wurde. Bild (b) gibt die Temperaturverteilung bei 63,9 MHz wieder, bei der sich eine Maximaltemperatur von 321,9 K ergab. Bei 127,8 MHz in Bild (c) wurden an der Kabelspitze lediglich 296,6 K erreicht. Aufgrund der elektrischen Feldverteilung befindet sich bei dieser Frequenz die wärmste Stelle weiter im Inneren des Phantoms und nicht an der Kabelspitze (vgl. Abbildung 6.9).

**Abbildung 6.18:** Vergleich der berechneten Temperaturzunahme (rote Kurve) mit der absolut gemessenen Erwärmung (blaue Quadrate) an der Kabelspitze in Abhängigkeit von der Kabelposition zum geometrischen Mittelpunkt des MR-Tomographen. Die Erwärmung ist umso größer, je weiter außen das Kabel im Phantom zu liegen kommt. Obwohl die Daten aufgrund unterschiedlicher Einheiten nicht direkt vergleichbar sind, skizzieren beide Kurven aufeinander (Messwerte von LUECHINGER).



## 6.2.7 Numerische Modelle im Vergleich mit anderen experimentellen Studien

### 6.2.7.1 Erwärmung eines Kupferkabels in einem Salzwasserphantom

Im Rahmen einer Kooperation mit dem Institut für Biomedizinische Technik der Eidgenössisch Technischen Hochschule (ETH) in Zürich, Schweiz, wurden numerische Untersuchungen durchgeführt, um vorhandene experimentelle Ergebnisse der Erwärmung eines Kabels in einem salzwassergefüllten Plexiglasphantom zu überprüfen (LUECHINGER, 2002).

Im Experiment wurde ein isoliertes Kupferkabel mit einer Länge von 0,56 m und einer Dicke von 0,6 mm in einem quaderförmigen Plexiglasphantom ( $0,334 \text{ m} \times 0,634 \text{ m} \times 0,094 \text{ m}$ ) platziert, welches mit isotonischer Kochsalzlösung (0,9 % NaCl) gefüllt wurde. Das Kabel wurde zunächst so ausgerichtet, dass es genau im Zentrum des Plexiglasphantoms entlang der langen z-Koordinatenachse zu liegen kam.

Am Kabelende wurde eine Messfaser eines faseroptischen Temperaturmessgerätes angebracht, um während der MR-Sequenz die Erwärmung an der Kabelspitze erfassen zu können<sup>2</sup>. Das Plexiglasphantom wurde in einem 1,5 T-MR-Tomographen (R-Magnet, 63,9 MHz) platziert. Dabei wurde die lange Phantomachse parallel zur magnetischen Grundfeldrichtung des MR-Tomographen ausgerichtet. Das Kabel im Inneren des Phantoms wurde durch Haltevorrichtungen so fixiert, dass es sich genau im geometrischen Zentrum des MR-Tomographen parallel zum statischen Grundfeld befand.

Die Erwärmung am Kabel wurde während einer Turbo Spin Echo Sequenz mit einer maximalen Stärke des HF-Feldes von  $B_1 = 27 \mu\text{T}$  kontinuierlich aufgezeichnet. In weiteren Experimenten wurde das Kabel sukzessive in einer Richtung an den Rand des Phantoms verschoben und die Temperaturmessung wiederholt. Wie in den eigenen experimentellen Studien beobachtet, stieg auch hier im salzwassergefüllten Phantom die Temperatur an der Kabelspitze innerhalb kurzer Zeit auf einen konstanten Maximalwert an und zeigte am Ende der MR-Sequenz einen exponentiellen Abfall auf den Ausgangswert. Abbildung 6.18 zeigt die maximal beobachteten Erwärmungen einer Messreihe als Messpunkte mit Fehlerbalken.

<sup>2</sup>Die Vorteile dieses Verfahrens liegen zum einen in der hohen zeitlichen Auflösung der Temperaturmessung (bis zu einigen Hertz) und der Tatsache, dass für die Temperaturmessung keine metallischen Materialien in oder an den MR-Tomographen gebracht werden müssen, die bei der Bildgebung Artefakte erzeugen.

Der numerische Aufbau wurde einem Experiment von LUECHINGER nachempfunden. Ein in den Abmessungen übereinstimmendes quaderförmiges Plexiglasphantom mit inliegendem Kupferkabel wurde dazu in einem Helmholtzspulensystem modelliert. Der numerische Aufbau ergab sich ähnlich zur Kabelphantomstudie in Abbildung 6.3.

Um die Kabelgeometrie modellieren zu können, war es notwendig ein Gitternetz mit unterschiedlichen Schrittweiten und ca. 800 000 Voxeln zu erstellen. Die Kabelspitze wurde hierbei mit einer Auflösung von bis zu  $0,1 \text{ mm} \times 0,1 \text{ mm} \times 0,1 \text{ mm}$  als flaches Kabelende nachgebildet, welches auf einer Länge von 1 mm „abisoliert“ wurde.

Die Stromstärke im Helmholtzspulensystem wurde so gewählt, dass eine HF-Feldstärke (Amplitude) von  $B_1 = 27 \mu\text{T}$  im Inneren des Spulensystems erzeugt wurde. Das elektrodynamische Problem wurde daraufhin mit dem PSBCGR-Algorithmus im Frequenzbereich (vgl. Abschnitt 2.3) mit dem Programm Paket MAFIA gelöst und aus der berechneten elektrischen Feldverteilung mit Gleichung (4.7) die Leistungsabsorption (*SAR*) im Phantom und an der Kabelspitze bestimmt. Mit Hilfe von Gleichung (4.8) wurde aus den ermittelten *SAR*-Werten eine obere Grenze für die maximal zu erwartende Erwärmung abgeschätzt.

Im numerischen Modell wurde das Kabel ebenfalls vom geometrischen Zentrum des Phantoms nach außen verschoben. Dabei wurden fünf Positionen ausgehend vom geometrischen Zentrum berücksichtigt ( $x = 0 \text{ cm}, 2,5 \text{ cm}, 5 \text{ cm}, 10 \text{ cm}$  und  $15 \text{ cm}$ ). Es ergaben sich Temperaturzunahmen von  $0,05 \text{ K/s}$  im Zentrum ( $x = 0 \text{ cm}$ ) bis zu  $8,56 \text{ K/s}$  nahe der Seitenwand des Phantoms ( $x = 15 \text{ cm}$ ).

In Abbildung 6.18 sind neben einer experimentellen Messreihe auch die Ergebnisse der numerischen Untersuchung aufgetragen. Da zum Zeitpunkt dieser Studie noch kein thermodynamischer Algorithmus zur Verfügung stand, konnte kein direkter Vergleich zwischen den Ergebnissen durchgeführt werden, da die sich tatsächlich einstellende Temperatur mit Hilfe der einfachen Abschätzung nach Gleichung (4.8) nicht berechnet werden konnte. Die Abbildung zeigt aber gleichwohl, dass die Kurven aufeinander skalieren und auch die numerische Simulation die Abhängigkeit der Erwärmung von der Kabelposition im Phantom richtig beschreibt.

Eine quadratische Abhängigkeit der Erwärmung von der Kabelverschiebung vom Ursprung, wie von LUECHINGER (2002) vermutet, konnte hier aber nicht nachgewiesen werden, da das elektrische Feld im Inneren des Phantoms nicht linear abfällt (vgl. Abbildung 6.13).

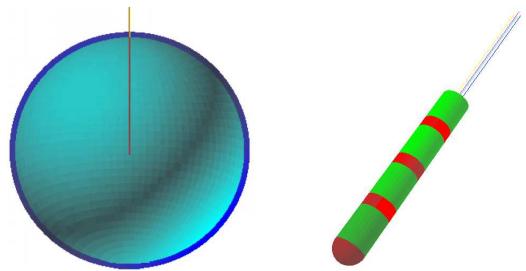
Die numerische Studie wurde in Teilen wiederholt, um den Einfluss einer Temperaturmessfaser auf die elektrische Feldverteilung am Kabelende zu untersuchen. Dabei zeigte sich, dass bei vorhandener Messfaser die elektrische Feldstärke an der Kabelspitze um bis zu 12 % im Vergleich zur Modellrechnung ohne Messfaser anstieg. Überträgt man das auf die spezifische Absorptionsrate nach Gleichung (4.7) so ergibt sich eine höhere *SAR* von ca. 25 %. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass bei der Verwendung von faseroptischen Temperaturmesssystemen höhere Erwärmungen gemessen werden könnten, als tatsächlich vorkommen.

Die Ergebnisse dieser Studie wurden bereits veröffentlicht (GOLOMBECK ET AL., 2000c).

### 6.2.7.2 Erwärmung einer Hirnelektrode in einem Salzwasserphantom

In Kooperation mit der Universität Heidelberg, Klinik für Neurochirurgie (Kopfklinik), wurden im Jahr 1999 Studien mit einem kugelförmigen Salzwasserphantom durchgeführt, um die Ergebnisse der Arbeitsgruppe TRONNIER ET AL. (1999b) der Kopfklinik numerisch zu überprüfen.

**Abbildung 6.19:** Numerisches Modell eines kugelförmigen Salzwasserphantoms (links) mit hochaufgelöster Tiefenhirnstimulationselektrode bestehend aus vier Platin-Iridium-Ringen (rechts), die sich genau im Zentrum des Phantoms befindet.



In den experimentellen Untersuchungen wurde in der Mitte eines kugelförmigen Salzwasserphantoms eine Hirnschrittmacherelektrode platziert und mit Hilfe einer Infrarot-Wärmekamera die Erwärmung in drei verschiedenen MR-Tomographen gemessen. Bei keiner der durchgeföhrten Untersuchungen konnte eine messbare Erwärmung festgestellt werden.

Im Rahmen einer numerischen Studie wurde dieses „Kopfmodell“ mit Elektrode in ein Helmholzspulensystem eingebracht, um die HF-Anregung eines MR-Tomographen zu simulieren. Abbildung 6.19 zeigt ein Schnittbild durch das kugelförmige Kopfphantom und eine Vergrößerung des numerischen Modells der Hirnelektrode.

Die modellierte Plexiglashohlkugel mit einem Durchmesser von 0,2 m wurde in ein dreidimensionales Gitter mit ca. 750 000 Voxeln überführt. Die Gitterschrittweite wurde im Zentrum des Phantoms auf bis zu  $0,1 \text{ mm} \times 0,1 \text{ mm} \times 0,5 \text{ mm}$  reduziert, um die Hirnelektrode, bestehend aus vier voneinander durch Isolatorstücke getrennte Platin-Iridum-Ringe, ausreichend genau modellieren zu können.

In Anlehnung an die experimentellen Arbeiten von TRONNIER ET AL. wurden MR-Frequenzen von 8,3 MHz und 63,9 MHz berechnet, was den magnetischen Grundfeldstärken von 0,2 T und 1,5 T der verwendeten MR-Tomographen entspricht. Die Stärke des magnetischen Hochfrequenzfelds wurde nach Gleichung (6.2) entsprechend einer HF-Pulsdauer von 1 ms und dem Flipwinkel von  $180^\circ$  gewählt.

Die Konzentration der Kochsalzlösung wurde in Übereinstimmung mit der experimentellen Studie von 1 % bis 4 % variiert. Die Leitfähigkeiten der Kochsalzlösung wurden gemäß STOGRYN (1971) den gewählten Konzentration angepasst. Tabelle 6.8 gibt die entsprechenden Leitfähigkeiten wieder.

Das elektrodynamische Problem wurde wiederum mit dem PSBCGR-Algorithmus im Frequenzbereich (vgl. Abschnitt 2.3) mit dem Programm paket MAFIA gelöst. Aus der berechneten elektrischen Feldverteilung wurde die deponierte Leistung bestimmt. Eine Analyse der im Experiment verwendeten Turbo Spin Echo Sequenz ergab, dass die Gesamtdauer der HF-Einstrahlung 18,24 s betrug. Diese Zeitdauer wurde in Gleichung (4.8) verwendet, um eine obere Grenze für die maximal zu erwartende Erwärmung an der Hirnelektrode abzuschätzen.

Tabelle 6.8 gibt die so ermittelten Ergebnisse wieder. Es zeigte sich, dass bei zunehmender Salzkonzentration bei 63,9 MHz die maximale Erwärmung von 183,2 mK auf 20,9 mK zurückging. Bei 8,3 MHz wurden Temperaturen von 91,2 mK bis 70,8 mK beobachtet.

Diese Abnahme ist auf eine Zunahme der elektrischen Wirbelströme in den Randgebieten des Phantoms zurückzuführen, was wiederum einen stärkeren Abfall des elektrischen Feldes im Inneren des Phantoms erzeugt und damit zu niedrigeren Erwärmungen führt. Dieser Effekt wurde auch schon bei der Kabelphantomstudie in Abschnitt 6.2.6 beobachtet.

Die berechneten maximalen Erwärmungen bestätigen die experimentellen Ergebnisse in der Arbeit von TRONNIER ET AL. (1999B), die mit ihrem Messaufbau keine Erwärmung nachweisen konnten, da die Wärmebildkamera aufgrund ihres Temperaturauflösungs nur Erwärmungen über 150 mK registrieren kann. Im Experiment fiel dazu noch die tatsächliche Erwärmung an den Elektroden aufgrund des Wärmetransports bei gepulstem HF-Feld deutlich geringer aus, der bei der Berechnung der maximalen Erwärmung vernachlässigt wurde.

Die Ergebnisse dieser Studie wurden bereits veröffentlicht (GOLOMBECK ET AL., 1999; GOLOMBECK & DÖSSEL, 2000; GOLOMBECK ET AL., 2000C; GOLOMBECK ET AL., 2000B; GOLOMBECK ET AL., 2000A).

### 6.2.8 Diskussion der experimentellen und numerischen Ergebnisse

In den vorstehenden Abschnitten wurden Experimente, numerische Modelle und theoretische Überlegungen zur Problematik der Kabel- und Elektrodenerwärmung durch die Felder eines MR-Tomographen vorgestellt. Die Ergebnisse der in den Abschnitten 6.2.5 und 6.2.6 numerischen Studie lassen Rückschlüsse auf die in Abschnitt 6.1.3 vorgestellten Arbeiten und in Abschnitt 6.2.7 präsentierten eigenen Ergebnisse zu.

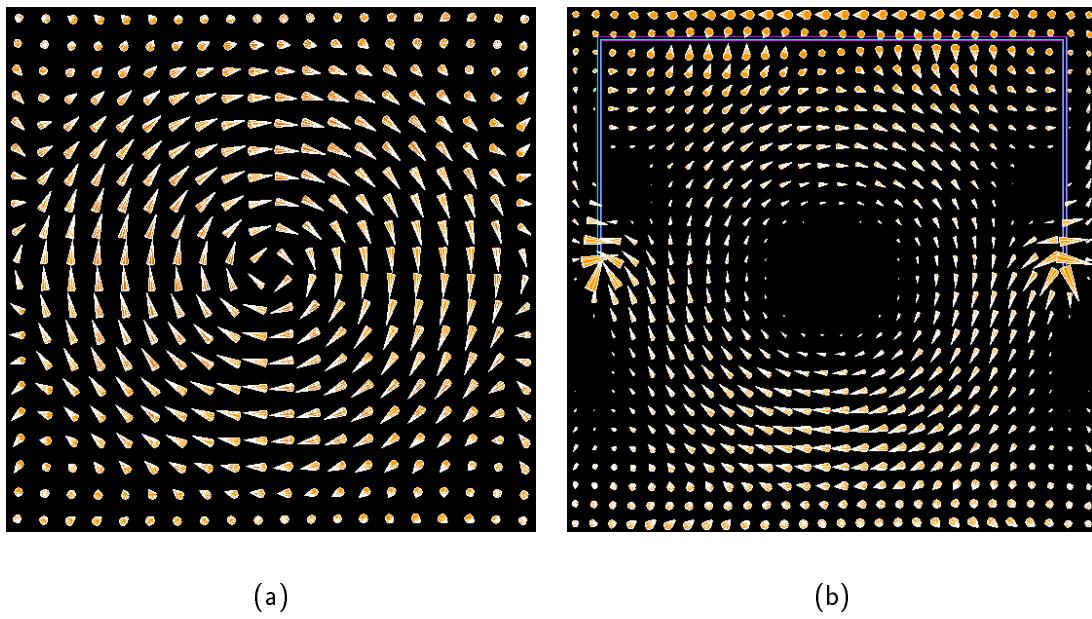
Es konnte gezeigt werden, dass mit Hilfe einer feldtheoretischen Abschätzung die Amplitude der elektrischen Feldverteilung im Inneren eines quaderförmigen Salzwasserphantoms näherungsweise berechnet werden kann. Bei dieser Abschätzung wurden allerdings keine Elektroden oder Kabel im Phantom berücksichtigt und es stellt sich die Frage, inwieweit die Ergebnisse der Näherungslösung für die Vorhersage von Erwärmungen bei Kabeln anwendbar sind.

Abbildung 6.20 zeigt den Einfluss eines Kabels auf die Stromdichteverteilung im Inneren des Phantoms (Modell 2). Ist kein Kabel vorhanden, so ergibt sich ein fast kreisförmiger Wirbelstrom. Bei vorhandenem Kabel ist zwar noch der Wirbelstrom zu erkennen, allerdings ergeben sich erhebliche Veränderungen der Wirbelstromverteilung. Es zeigen sich z. B. auch Überhöhungen der Stromdichte an den abisolierten Enden des Kabels. Die Näherungslösung für die elektrische Feldamplitude (6.38) berücksichtigt diesen Effekt nicht.

Die numerischen Ergebnisse in Abschnitt 6.2.7 zeigen beim Vergleich mit den Feldverläufen in Abbildung 6.13 große Ähnlichkeit (C-Magnet). Die Erwärmung an der Kabel- oder Elektrodenspitze nimmt zu, je weiter außen im Phantom sie sich befindet. Die Form der Temperaturzunahme ähnelt dem elektrischen Feldverlauf eines Phantoms ohne Elektrode. Daraus lässt

NaCl-Konzentration	1 %	2 %	3 %	4 %
Leitfähigkeit	1,80 S/m	3,02 S/m	4,24 S/m	5,46 S/m
8,3 MHz	91,2 mK	73,7 mK	70,8 mK	77,8 mK
63,9 MHz	183,2 mK	80,2 mK	45,2 mK	20,9 mK

**Tabelle 6.8:** Absolute maximale Erwärmung an der Tiefenhirnstimulationselektrode im Salzwasserphantom im schlimmsten Fall nach 18,24 s HF-Einstrahlung bei 8,3 MHz und 63,9 MHz und vier verschiedenen Konzentrationen der Kochsalzlösung im Phantom. Bei höherer Salzkonzentration steigt die Leitfähigkeit der Salzlösung und die Wirbelströme in den äußeren Bereichen des Phantoms nehmen zu und verringern so die Energiedeposition an der Elektrode in der Phantommitte. Die maximale Erwärmung nimmt dadurch ab.



**Abbildung 6.20:** Stromdichtewirbel im Phantom ohne Kabel (a) und mit Kabel (b) bei R-Magnetkonfiguration. Ist kein Kabel im Phantom vorhanden, so ergibt sich bis auf einige Reflexionen am Rand ein symmetrischer kreisförmiger Wirbelstrom. Bei vorhandenem Kabel in Bild (b) zeigt sich eine deutliche Veränderung des Wirbelstrommusters mit Überhöhungen der Stromdichte an den abisolierten Kabelenden und damit eine höhere deponierte Leistung.

sich folgern, dass bei Kenntnis der elektrischen Feldverteilung im Phantom auch Aussagen über die Erwärmung in Abhängigkeit der Kabelposition mit der feldtheoretischen Näherungslösung gemacht werden können.

Bei den verschiedenen Kabelpositionierungen ergaben sich ausgezeichnete Positionen bezüglich der Ausrichtung des magnetischen Grundfelds (R- oder C-Magnet), die besonders hohe spezifische Absorptionsraten an den Kabelspitzen ergaben. Entscheidend für die Erwärmung ist der Verlauf der Wirbelströme im Phantom. Abbildung 6.3 zeigt den Zusammenhang zwischen HF-Anregung und Wirbelstrombildung im Phantom. Beim C-Magneten verlaufen die Wirbelströme stets in Ebenen senkrecht zur  $xy$ -Ebene in der die Kabel liegen. Die berechneten SAR-Werte im C-Magneten liegen beim spitzen Kabelende nur manchmal über den Werten beim flachen Kabelende und sind meistens ungefähr gleich groß. Die Kabel liefern im C-Magneten daher nur einen geringen Anteil zur resultierenden Erwärmung. Die berechneten SAR-Werte wären auch ohne inliegende Kabel in der C-Magnetkonfiguration ungefähr gleich groß. Beim R-Magneten gibt es Wirbelströme, die in der Kabelebene verlaufen und dann deutlich höhere spezifische Absorptionsraten erzeugen (vgl. mit Tabellen 6.2, 6.3, 6.4 und 6.5).

Für Patienten folgt daraus eine einfache Sicherheitsregel. Bei einer MR-Untersuchung ist die Ausrichtung des statischen Magnetfelds zur Ebene, in der das Schrittmacherkabel liegt, zu beachten. Szenarien, in denen das Grundfeld senkrecht zur Kabelebene ist, zeigen geringere Erwärmungen an den Elektrodenspitzen (C-Magnet in der Phantomstudie), als statische Felder parallel zur Kabelebene. Bei Kenntnis der Kabellage im Körper des Patienten kann durch eine entsprechende Lagerung oder Auswahl eines MR-Tomographen mit geeigneter Bauart (unterschiedliche Grundfeldrichtungen) das Risiko einer gewebeschädigenden Erwärmung reduziert werden.

Erstaunlich ist aber, dass die Kabelpositionen von Modell 1 und 2 höhere maximale *SAR*-Werte ergaben als bei Modell 3. Dies ist vermutlich dadurch bedingt, dass in den Ecken des Phantoms, in denen die Kabelenden von Modell 3 zu liegen kommen, die Stromdichte abnimmt (vgl. Abbildung 6.20) und außen an den Seitenmitten des Phantoms die Stromdichte und damit das elektrische Feld seine Maximalwerte erreicht. Das Kabel in Modell 4 liegt mit seinen Enden zwar in Bereichen mitunter hoher Feldstärken, was aber aufgrund der senkrecht auf den Kabelenden stehenden Stromdichte nur zu einer geringen spezifischen Absorptionsrate führt.

Für die Erwärmung eines Kabelendes ist daher nicht nur die absolute Lage des Kabelendes in Gebieten hoher Feldstärke von Bedeutung, sondern vielmehr auch der Verlauf des Kabels entlang der resultierenden Feldlinien. Anders ausgedrückt spielt der Potentialunterschied zwischen zwei Punkten im Phantom mit einer Rolle, der sich durch Lösung des Linienintegrals  $U = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$  ergibt. Dies ist aber nicht das allein entscheidende Maß, da aufgrund dieser Überlegung bei Modell 2 aufgrund des längeren Kabels höhere *SAR*-Werte zu erwarten wären, als bei Modell 1, was aber nicht der Fall ist, da das Kabel bei Modell 2 etwas weiter im Inneren des Phantoms liegt als bei Modell 1. Betrachtet man noch einmal die Wirbelstromverteilung in Abbildung 6.20, so ist sofort ersichtlich, dass Modell 4 mit einer Kabelposition exakt in der Phantommittie bei beiden statischen Magnetfeldausrichtungen nur geringe *SAR*-Werte an den Kabelenden ergibt.

Mit diesem Hintergrund lassen sich auch die unterschiedlichen experimentellen Ergebnisse von LUECHINGER ET AL. (1999) und TRONNIER ET AL. (1999B) verstehen. Im Falle des kugelförmigen Salzwasserphantoms wurde die Elektrode immer exakt im Zentrum des Phantoms platziert, was mit der Kabelposition von Modell 4 vergleichbar ist und nach der obigen Argumentation nur geringe *SAR*-Werte ergibt. Die Tatsache, dass in den Arbeiten von LUECHINGER relevante Erwärmungen beobachtet wurden liegt auch in diesen Fällen an den verwendeten Kabelpositionen, die mit Modell 1, 2 oder 3 vergleichbar sind.

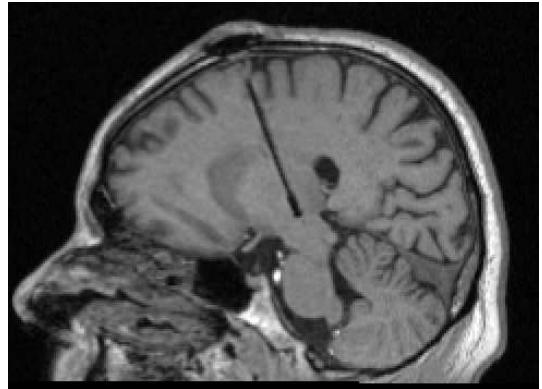
Bisher ungeklärt erscheint die unterschiedliche zeitliche Entwicklung der Erwärmung im Experiment und in der numerischen Simulation. Abbildung 6.2 zeigt den typischen Temperaturverlauf bei einer faseroptischen Temperaturmessung an einer Elektrodenspitze im Salzwasserphantom. Die Temperatur erreicht in kurzer Zeit ihr Maximum und bleibt dann auf einem konstanten Wert, bis die MR-Sequenz beendet wird. Im Gegensatz dazu zeigt Abbildung 6.16 in der numerischen Betrachtung einen exponentiellen Kurvenverlauf.

Der Unterschied im zeitlichen Verhalten liegt möglicherweise in der Tatsache begründet, dass sich im Salzwasser zusätzlich zur Wärmediffusion eine Konvektionszone aufbaut, die einen zusätzlichen Wärmeabtransport von der Elektrodenspitze erzeugt. Dieser zusätzliche Wärmetransportmechanismus wurde bei der numerischen Berechnung nicht berücksichtigt. Verwendet man statt einer Kochsalzlösung eine feste Füllmasse, z. B. Agar-Agar, so werden im Experiment auch exponentielle Temperaturkurven gemessen, da sich dann keine Konvektionszone an der Elektrodenspitze ausbilden kann (BIELER, 2000).

Unter diesen Gesichtspunkten stellen die mit dem thermodynamischen Algorithmus berechneten maximalen Erwärmungen wiederum eine obere Grenze für die Erwärmung an der Kabelspitze dar, die allerdings viel genauer als die Werte der einfachen Abschätzung sind.

Vergleicht man die gemessenen maximalen Erwärmungen an den Kabelenden in Abschnitt 6.2.7.1 mit den berechneten Erwärmungen an den Kabelenden von Modell 1 in Abschnitt 6.2.6 bei 63,9 MHz, so zeigt sich, dass die maximale gemessene Erwärmung von 7,4 K ungefähr ein Viertel der Erwärmung von 28,9 K am Ende der MR-Sequenz bei Modell 1 ergibt. Berücksichtigt man aber, dass eher die Kabelposition 3 dem experimentellen Aufbau der Studie in Abschnitt

**Abbildung 6.21:** MR-Aufnahme eines Kopfes mit Tiefenhirnstimulationselektrode zur Behandlung der Parkinsonkrankheit. Die Stimulationselektrode wird bei diesem Verfahren im Zentrum des Kopfes in der Thalamusregion positioniert.



6.2.7.1 entspricht, so muss die bei Modell 1 erhaltene Erwärmung noch einmal reduziert werden, da bei Kabelposition 3 kleinere *SAR*-Werte berechnet wurden. Außerdem berücksichtigt die thermodynamische Berechnung keine Kühlungseffekte durch lokale Konvektionszonen. Damit kann man durchaus von einer relativ guten Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung sprechen. Vergleicht man diese Ergebnisse mit Werten aus der Arbeit von LUECHINGER ET AL. (1999), wo Erwärmungen von über 30 K gemessen wurden, so zeigt sich auch hier eine gute Übereinstimmung der numerischen und experimentellen Ergebnisse.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde allerdings keine Abhängigkeit der Erwärmung von der Kabellänge betrachtet. Entspricht die Kabellänge der jeweiligen Wellenlänge im Salzwasserphantom, so sind besonders hohe Erwärmungen zu erwarten (LUECHINGER, 2002). Die in dieser Arbeit verwendeten Kabellängen wurden bewusst so gewählt, dass keine Resonanzeffekt entstehen. Um den Einfluss der Kabellänge auf die entstehende Erwärmung zu untersuchen sind daher weitere numerische Studien notwendig. Dabei müssen auch andere Kabeleigenschaften, die das Resonanzverhalten des Kabels beeinflussen mit berücksichtigt werden.

Die numerische Studie in Abschnitt 6.2.6 konnte einen wichtigen Beitrag zum Verständnis experimenteller Studien mit salzwassergefüllten Phantomen und Elektroden im MR-Tomographen liefern. Allerdings bleibt die Frage offen, inwieweit diese Ergebnisse direkt auf den Menschen übertragbar sind und ob gefundene kritische Erwärmungen in Phantomstudien automatisch eine Gefährdung für den Patienten bedeuten. Diese Frage lässt sich nur mit Hilfe hochauflöster Körpermodelle beantworten und wird im nächsten Unterkapitel diskutiert.

### 6.3 Simulationen mit hochauflösten Körpermodellen

Trotz der zahlreichen Ergebnisse numerischer Studien mit Salzwasserphantomen bleibt die Frage offen, welche Relevanz diese Ergebnisse tatsächlich für Patienten besitzen. Aus diesem Grund wurden zwei hochauflöste Modelle des menschlichen Körpers mit implantierten Elektroden erstellt, die sich an den vorgestellten Studien mit Salzwasserphantomen aus Abschnitt 6.2.7 orientieren. Im nächsten Abschnitt wird ein hochauflötes Kopfmodell mit implantiertter Tiefenhirnstimulationselektrode zur Behandlung der Parkinson-Krankheit vorgestellt. Im darauf folgenden Abschnitt wird ein Oberkörpermodell mit Herzschrittmacherelektrode beschrieben. Ziel der numerischen Untersuchung bei beiden Modellen war die Berechnung der Erwärmung an der Elektrodenspitze durch das HF-Feld in der MR-Tomographie.

### 6.3.1 Tiefenhirnstimulation zur Behandlung der Parkinsonkrankheit

Die Stimulation von Hirngewebe zur Behandlung der Parkinsonschen Krankheit und anderen Schmerz- oder Lähmungszuständen gehört heute zu den Standardverfahren der neurochirurgischen Praxis (TRONNIER ET AL., 1999A).

Bei der Tiefenhirnstimulation (Deep Brain Stimulation - DBS) wird insbesondere die Thalamusregion, die in etwa im Zentrum des Schädels liegt, mit speziellen Hirnschrittmacherelektroden stimuliert. Um den Erfolg der Therapie nach der Implantation der Elektroden und Schrittmacher zu überwachen, ist es notwendig, Bilder vom Kopf des Patienten aufzunehmen. Die Magnetresonanztomographie ist aufgrund ihrer hervorragenden Bildqualität dafür besonders gut geeignet. Abbildung 6.21 zeigt ein Schnittbild eines Patienten mit einer Tiefenhirnstimulationselektrode.

Bei einer MR-Aufnahme setzen sich diese Patienten aber dem Risiko der Elektrodenerwärmung durch Leistungsaufnahme aus dem MR-HF-Feld aus. Um Risiken für Patienten auszuschließen wurde bereits eine experimentelle Studie mit einem kugelförmigen Salzwasserphantom in Abschnitt 6.2.7 vorgestellt (TRONNIER ET AL., 1999B), bei der keine Erwärmung festgestellt werden konnte. Eigene numerische Untersuchungen an einem Phantommodell untermauerten die experimentellen Ergebnisse.

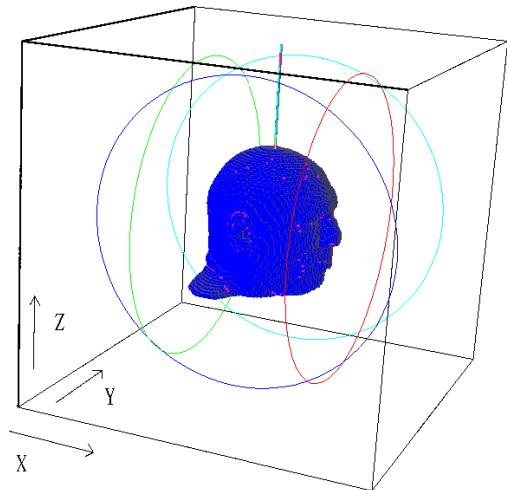
Da ein allgemeiner Schluss von den numerischen und experimentellen Ergebnissen einer Phantomstudie auf den menschlichen Körper nicht uneingeschränkt möglich ist, wird in diesem Abschnitt eine numerische Studie mit einem hochauflösten Modell des menschlichen Kopfes vorgestellt, mit dem die Erwärmung an einer implantierten Hirnstimulationselektrode durch das HF-Feld eines MR-Tomographen berechnet wird. Der Modellaufbau orientiert sich dabei an der klinischen Anwendung der Tiefenhirnstimulation.

Die Grundlage des numerischen Kopfmodells ist der MEET-Man Körperdatensatz. Dies ist ein hochauflötes Computermodell des menschlichen Körpers, welches aus über 400 Millionen kubischen Voxeln von  $1 \text{ mm}^3$  Größe besteht, die in 44 Gewebearten klassifiziert sind (SACHSE ET AL., 2000B). Aus diesem Körperdatensatz wurde der Kopf „ausgeschnitten“ und in ein kubisches Gitternetz mit 0,6 m Kantenlänge zentriert eingefügt. Die Gitterschrittweite wurde dabei zwischen 6 mm und 1 mm variiert, um in der Elektrodenregion im Zentrum des Kopfes feiner aufzulösen als in den umliegenden Geweberegionen oder dem Außenraum. Insgesamt ergab sich so ein Gitternetz mit ca. 3 300 000 Voxeln.

Die Elektrode wurde senkrecht von oben in das Zentrum des Kopfes „implantiert“ und besteht aus zwei Würfeln aus Platin-Iridium (Kantenlänge 2 mm), die über Drähte mit einem Widerstand von  $5 \text{ M}\Omega$  am oberen Rand des Rechenvolumens verbunden sind. Dieser Widerstand simuliert den Eingangswiderstand des Hirnschrittmachers. Die Zuleitungsdrähte wurden in eine isolierende Umhüllung aus Polytetrafluoroethylene (PTFE) eingebettet. Die Geometrie der Elektrode musste aufgrund der Modellgröße mit über 3 000 000 Voxeln und dem dadurch bedingten hohen Speicherbedarf stark vereinfacht werden (vgl. Abschnitte 5.2.7 und 6.2.7.2).

Abbildung 6.22 zeigt eine Ansicht des numerischen Modells. Die gut zu erkennende PTFE-Isolation des Elektrodenkabels verläuft parallel zur Richtung des statischen magnetischen Grundfelds in  $z$ -Richtung. Die HF-Anregung wird durch zwei Helmholtzspulenpaare erzeugt. Aufgrund der Lage des Kopfes und der Helmholtzspulenpaare stellt diese numerische Anordnung einen MR-Tomographen mit Röhrenmagnet (R-Magnet) dar. Die Stromstärke in den Spulenpaaren wurde so gewählt, um eine Pulsdauer von 1 ms für einen  $180^\circ$ -Puls zu erhalten.

**Abbildung 6.22:** Numerisches Kopfmodell mit implantierter Tiefenhirnstimulationselektrode. Die Elektrode liegt im Zentrum des Kopfes und ist über zwei Drähte an einen Abschlusswiderstand angeschlossen. Die Feldanregung wurde mit zwei Helmholtzspulenpaaren realisiert. Die Zuleitung des Elektrodenkabels liegt genau im Zentrum des Spulensystems und zeigt in Richtung des statischen magnetischen Grundfelds. Dies entspricht einem MR-Tomographen mit einem R-Magneten.



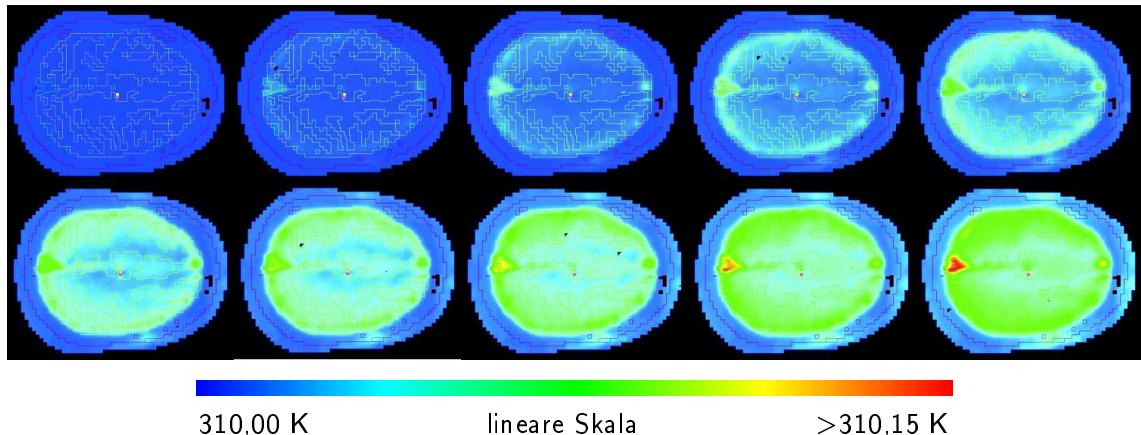
Das so definierte elektrodynamische Problem wurde im Frequenzbereich bei drei Frequenzen (8,3 MHz, 42,6 MHz und 63,9 MHz) mit dem PSBCGR-Algorithmus gelöst (magnetische Grundfeldstärken von 0,2 T, 1,0 T und 1,5 T). Aus der resultierenden elektrischen Feldverteilung wurde mit Gleichung (4.7) die deponierte Leistung im Kopfmodell berechnet, die dann als Eingabeparameter für den thermodynamischen Algorithmus diente.

In Anlehnung an die vereinfachte MR-Sequenz des kugelförmigen Salzwasserphantoms aus Abschnitt 6.2.7.2 wurde auf ein reales MR-Sequenztiming verzichtet. Stattdessen wurden alle einzelnen HF-Pulse der im Experiment verwendeten Turbo Spin Echo Sequenz aufsummiert und auf einmal eingestrahlt (hier 18,24 s Gesamt-HF-Zeit). Dies stellt für die HF-Belastung des Patienten den schlimmsten Fall dar. Mit dieser Annahme wurden zum einen mit Hilfe der einfachen Abschätzung nach Gleichung (4.8) und zum anderen mit dem thermodynamischen Algorithmus die Erwärmung im Kopfmodell berechnet und miteinander verglichen.

Diese Vorgehensweise stellt eine starke Vereinfachung einer MR-Sequenz dar. Im Prinzip müsste die berechnete Leistung im Kopfmodell noch an das Puls-Pausen-Verhältnis der HF-Einstrahlung

Messpunkt	Einfache Abschätzung in K	Thermodynamik in K	Überschätzung in %
Elektrode	310,174	310,062	180,74
CSF 1	310,109	310,039	184,40
CSF 2	310,230	310,173	32,70

**Tabelle 6.9:** Vergleich der absoluten Erwärmung an drei lokalen heißen Stellen im Kopfmodell zwischen der einfachen Abschätzung mit dem thermodynamischen Algorithmus nach einer HF-Einstrahlung von 18,24 s Dauer (63,9 MHz) und einer Ausgangstemperatur von 310 K. Die maximale Erwärmung wurde in der cerebrospinalen Flüssigkeit (CSF) beobachtet und nicht an der Elektroden spitze selbst. Betrachtet man das Verhältnis der Temperaturzunahme in beiden Fällen, so ergibt sich bereits nach der kurzen Simulationsdauer eine Überschätzung der maximalen Erwärmung um fast den Faktor zwei mit der einfachen Abschätzung.



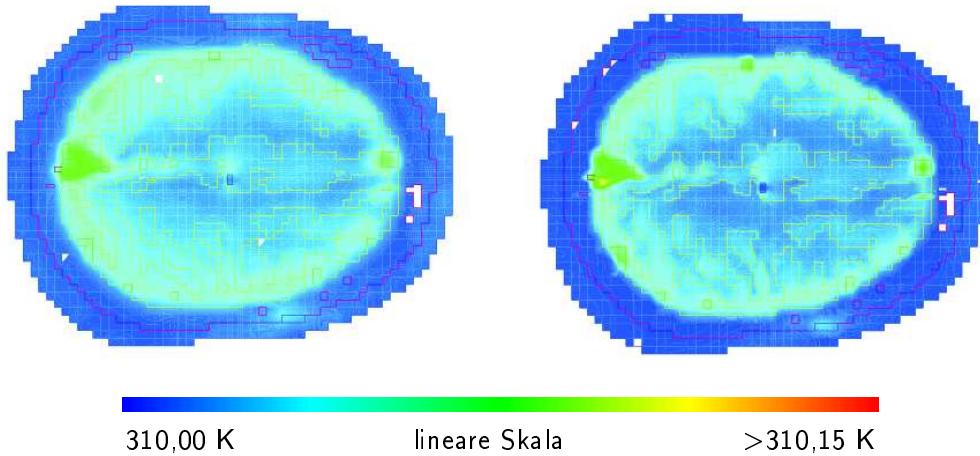
**Abbildung 6.23:** Zeitlicher Verlauf der Erwärmung im hochauflöstem Kopfmodell berechnet mit dem thermodynamischen Algorithmus. der zeitliche Abstand der Einzelbilder beträgt 2 s. Bei der Darstellung wurde diejenige Schicht gewählt (xy-Ebene), in der die maximale Erwärmung von 310,173 K in der cerebrospinalen Flüssigkeit auftritt.

angepasst werden. Für die einfache Abschätzung nach Gleichung (4.8) spielt das aber keine Rolle, da bei angepasster Leistung auch mit einer längeren Sequenzdauer gerechnet werden müsste. Die Ergebnisse wären in beiden Fällen die gleichen. Nicht so beim thermodynamischen Algorithmus, da in diesem Fall durch die drastische Verkürzung der Sequenzdauer ein Großteil der Diffusionszeit wegfällt, in der die Wärme mehr an das umliegende Gewebe verteilt werden könnte. Dadurch ergibt sich auch in der thermodynamischen Betrachtung ein „Schlimmster Fall“, zumal bei dieser Simulation auch die Gewebeperfusion vernachlässigt wurde, die einen zusätzlichen Kühlungseffekt erzeugt.

Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt in der daraus resultierenden Verkürzung der benötigten Rechenzeit, da bei der Iteration weniger Zeitschritte notwendig sind. Dieses vereinfachte Verfahren kann dann eingesetzt werden, wenn die Berechnung einer oberen Schranke der Erwärmung ausreichend ist. Ergeben sich bei diesem Verfahren aber unzulässige Erwärmungen oder sind genauere Einblicke in den zeitlichen Verlauf der Erwärmung während einer MR-Sequenz notwendig, so muss das Sequenztiming explizit modelliert werden. Dies wurde bereits im Rahmen einer Diplomarbeit am Institut für Biomedizinische Technik der Universität Karlsruhe (TH) untersucht (THIELE, 2002) und veröffentlicht (GOLOMBECK ET AL., 2002C; THIELE ET AL., 2002).

In Tabelle 6.9 sind die Erwärmungen an drei ausgesuchten Punkten im Kopfmodell angegeben. Die erfassten Punkte befinden sich an der Elektrodenspitze und der cerebrospinalen Flüssigkeit im vorderen und hinteren Bereich des Großhirns. Alle drei Punkte stellen in den beobachteten Kopfregionen die lokalen Erwärmungsmaxima dar. Die Ausgangstemperatur des Kopfmodells wurde homogen mit 310 K angenommen.

Die mit der einfachen Abschätzung berechneten Werte übersteigen die thermodynamische Lösung in zwei Fällen um fast den Faktor zwei. Die maximale Erwärmung wird wider Erwarten nicht an der Elektrode beobachtet sondern in der cerebrospinalen Flüssigkeit im hinteren Bereich des Kopfes. Die Temperaturzunahme bleibt aber selbst bei der Schlimmsten-Falls-Abschätzung mit 0,230 K unter der nach der IRPA (1991) maximal zulässigen Erwärmung im Kopf von 1,0 K



**Abbildung 6.24:** Vergleich zwischen der berechneten Erwärmung im Kopfmodell nach 10 s HF-Einstrahlung, die mit der Schlimmsten-Falls-Abschätzung (rechtes Bild) und dem thermodynamischen Algorithmus (linkes Bild) berechnet wurde. Die Berücksichtigung des Wärmetransports führt sowohl zu einer Verringerung der Erwärmung an den lokalen „heißen“ Stellen, als auch zu einer gleichmäßigeren Temperaturverteilung.

bei gesunden und 0,5 K bei schwangeren Personen. Dies gilt auch für die maximale Erwärmung von 0,174 K an der Elektrodenspitze.

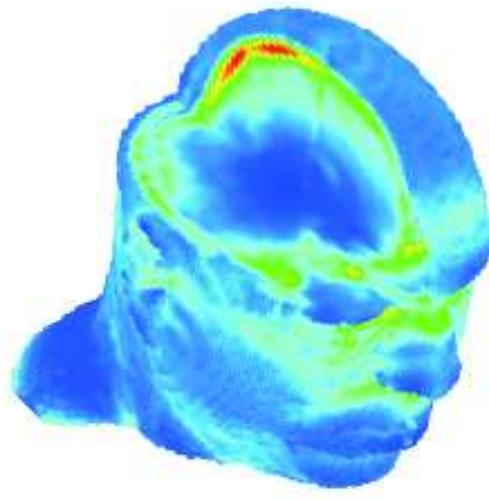
In Abbildung 6.23 ist der Zeitverlauf der Erwärmung bei einem Schnitt ( $xy$ -Ebene) durch den Kopf im Großhirn und der cerebrospinalen Flüssigkeit in einem Zeitraum von 0 s bis 18 s kontinuierlicher HF-Einstrahlung dargestellt. Ausgehend von einer homogenen Ausgangstemperatur von 310 K wurde die zeitliche Entwicklung der Schicht gewählt, in der die maximale Erwärmung der cerebrospinalen Flüssigkeit im hinteren Bereich des Kopfes auftritt.

Abbildung 6.24 vergleicht in einer Darstellung derselben Schnittebene wie in Abbildung 6.23 die Erwärmung des Gewebes nach 10 s HF-Einstrahlung zwischen der einfachen Abschätzung und der thermodynamischen Betrachtung. Durch die Wärmediffusion ergibt sich beim thermodynamischen Algorithmus eine gleichmäßigere Wärmeverteilung ohne „scharfe“ Kanten zwischen einzelnen Gewebeklassen.

Weitere Einblicke in die Temperaturverteilung erlaubt die dreidimensionale Darstellung der Erwärmung des Kopfmodells nach 18,24 s HF-Einstrahlung in Abbildung 6.25, bei der ein Teil des Kopfes ausgeschnitten ist, so dass ein Einblick in das Gehirn möglich ist. Diese Abbildung verdeutlicht die Erwärmung der cerebrospinalen Flüssigkeit, in der aufgrund ihrer hohen, mit Blut vergleichbaren Leitfähigkeit (vgl. Tabelle B.2 und B.3) ein besonders großer Energieverlust stattfindet.

Die maximale lokale Erwärmung an der Elektrodenspitze nach 18,24 s HF-Einstrahlung wird in Abbildung 6.26 wiedergegeben.

Die numerischen Ergebnisse des Kopfmodells entsprechen den berechneten Erwärmungen an den Elektroden des kugelförmigen Salzwasserphantoms in Abschnitt 6.2.7.2. Ausgehend von diesen Ergebnissen ist eine MR-Tomographie unter Berücksichtigung der gewählten MR-Parameter als



**Abbildung 6.25:** 3D-Darstellung der Erwärmung im Kopfmodell nach 18,24 s HF-Einstrahlung. Die Punkte maximaler Erwärmung finden sich in der cerebrospinalen Flüssigkeit im hinteren Bereich des Kopfes.

ungefährlich bezüglich der Erwärmung an der Elektrodenspitze einzustufen. Es sind keine irreversiblen gewebeschädigenden Effekte zu erwarten. Da bei dieser numerischen Studie außerdem die Gewebeperfusion vernachlässigt wurde, ergibt sich in der Realität eine weitere Verringerung der resultierenden Temperaturzunahme.

Die Tatsache, dass an den Elektrodenspitzen weder in den Experimenten von TRONNIER ET AL. (1999B) noch in den numerischen Modellen dieser Arbeit eine gesundheitlich relevante Erwärmung beobachtet wurde, lässt sich mit den Ergebnissen aus Abschnitt 6.2.6 verstehen. Da sich bei allen untersuchten Fällen die Elektrode stets im geometrischen Zentrum des MR-Tomographen oder Helmholtzspulensystems befand, was der Kabelposition 4 in Abschnitt 6.2.6 entspricht, wird aufgrund der dort dargestellten Zusammenhänge nur eine minimale Erwärmung erwartet.

Eine C-Magnetkonfiguration des statischen Magnetfelds wurde in dieser numerischen Studie nicht betrachtet. Ausgehend von den Ergebnissen aus Abschnitt 6.2.6 kann aber auch hier vermutet werden, dass sich bei einer MR-Untersuchung in einem C-Magneten ähnliche geringe Erwärmungen bei gleichen MR-Parametern ergeben dürften.

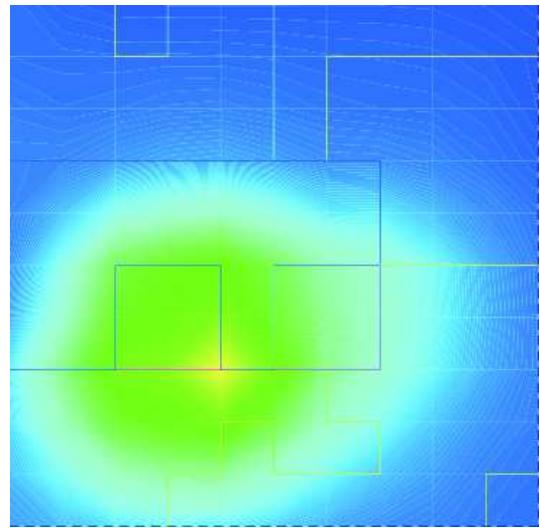
Die Ergebnisse dieser Studie wurden bereits veröffentlicht (GOLOMBECK ET AL., 1999; GOLOMBECK ET AL., 2000c; GOLOMBECK ET AL., 2000b; GOLOMBECK ET AL., 2000a; GOLOMBECK ET AL., 2002a).

### 6.3.2 Erwärmung von Herzschrittmacherelektroden im MR-Tomographen

Eine oft experimentell untersuchte Fragestellung ist die Erwärmung von Herzschrittmacherelektroden im MR-Tomographen. Neben Funktionsstörungen der integrierten Elektronik stehen in erster Linie gewebeschädigende Erwärmungen an den Elektrodenspitzen im Blickfeld zahlreicher experimenteller Untersuchungen mit salzwassergefüllten Phantomen (vgl. Abschnitt 6.1.3).

Bereits in Abschnitt 6.2.6 wurde die Frage aufgeworfen, ob diese Ergebnisse ohne Einschränkung auf den Menschen übertragen werden können und damit Warnungen vor gesundheitlichen Gefahren überhaupt berechtigt sind, wenn in Phantomstudien gewebeschädigende Erwärmungen

**Abbildung 6.26:** Erwärmung an der einfachen Elektrodenspitze im Kopfmodell nach 18,24 s HF-Einstrahlung. Die maximale Temperaturzunahme an der Elektrode ergab sich zu 62 mK.



nachgewiesen wurden. In diesem Abschnitt wird daher ein inhomogenes hochauflöste numerische Modell eines menschlichen Oberkörpers mit implantiertem Herzschrittmacher und Stimulationselektrode vorgestellt.

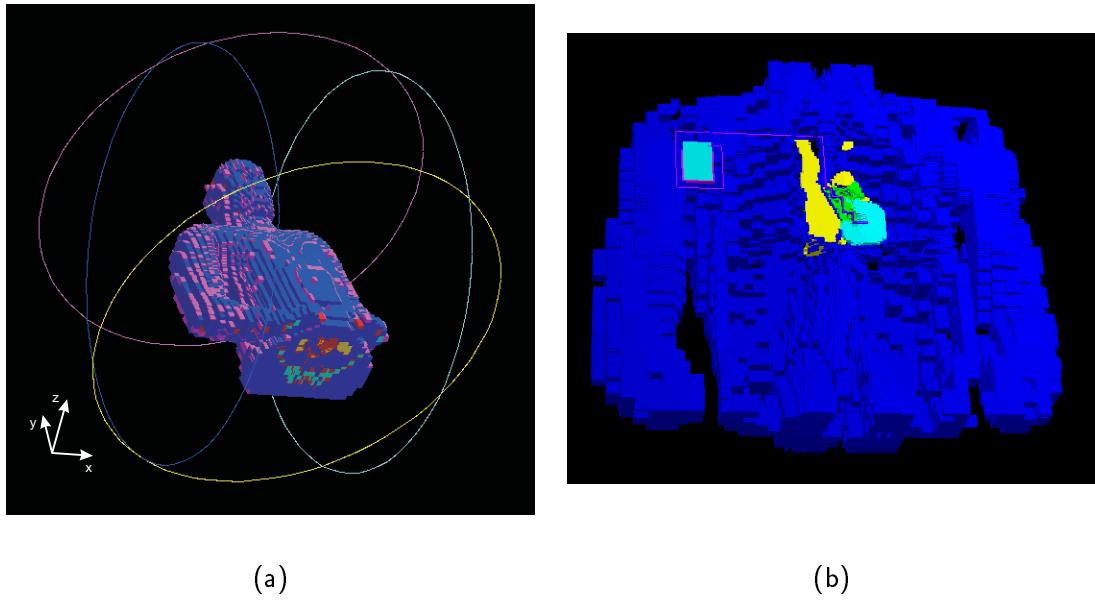
Das numerische Modell basiert auf dem MEET-Man Datensatz (SACHSE ET AL., 2000A) und besteht aus ca. 2 200 000 Voxeln. Die Gitterauflösung wurde im Bereich des Herzens auf bis zu 1,0 mm verfeinert und an der Elektrodenspitze sogar auf bis zu 0,1 mm. Die Spitze der Elektrode wurde als Kegel modelliert, was bezüglich der Elektrodenform eine möglichst ungünstige Wahl für die entstehende Erwärmung darstellt, um eine obere Grenze abschätzen zu können.

Der Herzschrittmacher wurde als quaderförmiger Kasten mit einer Kantenlänge von (50 mm × 60 mm × 10 mm) in der rechten Brusthälfte modelliert. Das Elektrodenkabel mit einer Länge von 0,64 m wurde in einer Schleife einmal um das Schrittmachergehäuse herum- und bis an die Herzspitze geführt. Am Ende des Kabels wurde eine kegelförmige Elektrodenspitze mit einer Länge von 1 mm angebracht, die sich im Herzmuskelgewebe befindet. Das Elektrodenkabel und die -spitze wurden aus Platin-Iridium modelliert, die Isolation des Elektrodendrahtes aus PTFE.

Abbildung 6.27 zeigt das numerische Modell in zwei Darstellungen. In Abbildung 6.27a ist das gesamte numerische Modell zwischen zwei Helmholtzspulenpaaren (C-Magnet) zu sehen, mit denen die HF-Anregung des MR-Tomographen modelliert wurde. Daneben wurde auch die R-Magnetkonfiguration berücksichtigt. Abbildung 6.27b ermöglicht durch ein Schnittbild einen Einblick in den Oberkörper des Modells und zeigt die Lage des Herzschrittmachers und des Elektrodenkabels. Das Herz des Patienten liegt dabei genau im Zentrum des Tomographen.

Das elektrodynamische Problem wurde wiederum mit dem PSBCGR-Algorithmus gelöst. Bei dieser Untersuchung wurde eine Feldfrequenz von 63,9 MHz verwendet, was einer magnetischen Grundfeldstärke von 1,5 T entspricht. Aus der resultierenden elektrischen Feldverteilung wurde die spezifische Absorptionsrate nach Gleichung (4.7) berechnet und daraus mit der einfachen Abschätzung nach Gleichung (4.8) die maximale Erwärmung an der Elektrodenspitze bestimmt.

Im nächsten Schritt wurde die zeitliche Entwicklung der Erwärmung an der Elektrodenspitze mit dem thermodynamischen Algorithmus berechnet. Dabei wurde im ersten Schritt zunächst die Perfusion vernachlässigt und in einem zweiten Durchgang berücksichtigt. Dies ermöglichte eine



**Abbildung 6.27:** Numerisches Oberkörpermodell mit implantiertem Herzschrittmacher. Bild (a) zeigt das Oberkörpermodell in der Gesamtansicht mit den beiden Helmholtzspulenpaaren zur Feldanregung in der Konfiguration eines C-Magneten. Bild (b) zeigt einen Schnitt durch den Oberkörper. Der Herzschrittmacher liegt in der rechten Brusthälfte und ist mit der Elektrode im linken Ventrikel über ein Kabel verbunden. Aus Darstellungsgründen wurden in dieser Ansicht die inneren Organe, sowie andere Strukturen bis auf den Herzmuskel und die Körpermuskulatur weggelassen.

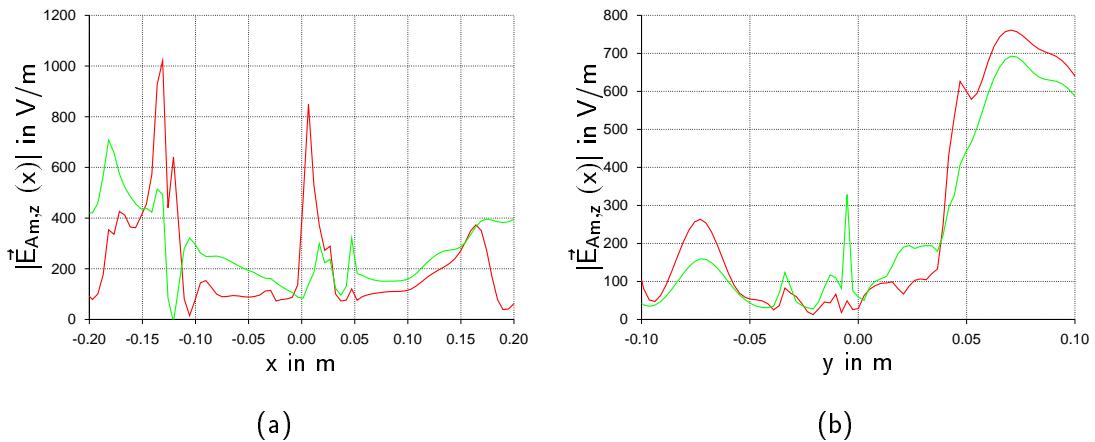
genauere Betrachtung des „kühlenden“ Effekts der Durchblutung und sollte beim Verständnis der experimentell beobachteten zeitlichen Temperaturverläufe helfen (vgl. Abschnitt 6.2.1).

In dieser Studie wurden insgesamt vier numerische Modelle erstellt und berechnet und für jedes Modell an der Elektrodenspitze die maximalen Erwärmungen mit den drei angesprochenen Verfahren (Einfache Abschätzung, thermodynamischer Algorithmus ohne und mit Gewebeperfusion) berechnet. Neben der unterschiedlichen Ausrichtung des magnetischen Grundfelds (R- oder C-Magnet) wurde der elektrische Kontakt zwischen Elektrodenskabel und Herzschrittmachergehäuse als leitend oder nicht-leitend modelliert, was unterschiedliche Betriebszustände des Schrittmachers darstellt.

Als MR-Sequenz wurde die in Abschnitt 6.2.6 erwähnte fiktive Turbo Spin Echo Sequenz mit einer Dauer von 2500 s (1,0 % HF-Anteil) verwendet. Die thermodynamische Simulation wurde mit Hilfe der adaptiven Zeitschrittsteuerung für eine Zeitdauer von 2500 s durchgeführt (vgl. Abschnitt 2.5.3).

Bei der Frage nach der Übertragbarkeit experimenteller und numerischer Ergebnisse von Salzwasserphantomstudien auf den menschlichen Körper hilft die Betrachtung der resultierenden elektrischen Feldverteilung im Oberkörpermodell. Es wurde bereits gezeigt, dass sich in Salzwasserphantomen die elektrischen Felder mit Hilfe einer Näherungslösung nach Gleichung (6.38) angeben lassen (vgl. Abbildung 6.13) und aus dem Feldverlauf Hinweise für die Erwärmung an Kabel- und Elektrodenspitzen abgeleitet werden können.

Abbildung 6.28 zeigt im Vergleich zu Abbildung 6.13 den Absolutbetrag der  $z$ -Komponente



**Abbildung 6.28:** Vergleich der Absolutbeträge der z-Komponente des elektrischen Feldes im menschlichen Körper bei der Magnetresonanztomographie entlang der x-Achse (a) und der y-Achse (b) durch die Mitte des Körpermodells bei einer Frequenz von 63,9 MHz im R-Magneten (rote Kurven) und C-Magneten (grüne Kurven). Im Gegensatz zu den homogen gefüllten Salzwasserphantomen ergibt sich beim inhomogenen Körpermodell eine grundverschiedene elektrische Feldverteilung ohne erkennbare Abhängigkeiten (vgl. Abbildung 6.13).

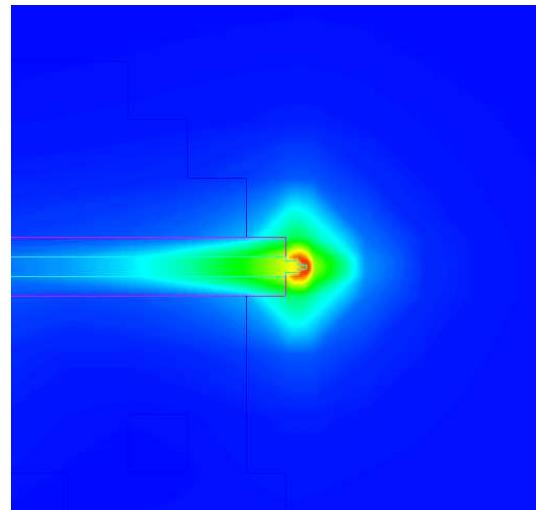
des elektrischen Feldes im Oberkörpermodell bei 63,9 MHz im R- und C-Magneten. Im Gegensatz zu den homogen gefüllten Salzwasserphantomen ergeben sich beim inhomogenen Körpermodell abweichende elektrische Feldverteilungen mit zahlreichen lokalen Minima und Maxima. Dies unterstützt die Vermutung, dass Ergebnisse aus Salzwasserphantomstudien nicht ohne Einschränkungen auf den Menschen übertragbar sind.

Tabelle 6.10 zeigt die Ergebnisse der berechneten maximalen Erwärmungen nach einer fiktiven

Magnet	Kabel	max. <i>SAR</i>	Einf. Abschätzung	Thermod. o. Perf.	Thermod. m. Perf.
		in W/kg	in K	in K	in K
C	leitend	5 856	41,472	0,053	0,013
C	isoliert	5 142	36,288	0,046	0,011
R	leitend	20 425	145,152	0,128	0,046
R	isoliert	14 811	106,272	0,101	0,034

**Tabelle 6.10:** Maximale Leistungsabsorption und Erwärmung an der Spitze der Herzschrittmacher-elektrode bei einer Frequenz von 63,9 MHz und einer Pulsdauer von 1 ms in verschiedenen Magnetkonfigurationen (C- und R-Magnet). Das Elektrodenkabel wurde entweder leitend mit dem Gehäuse des Schrittmachers verbunden oder war komplett davon isoliert. Aus den maximalen SAR-Werten wurde unter Annahme eines HF-Anteils von 1 % mit Hilfe der einfachen Temperaturabschätzung nach Gleichung (4.8) die Obergrenze der zu erwartenden Erwärmung berechnet. Weiterhin wurde die maximale Erwärmung nach einer MR-Sequenz mit 2 500 s Dauer mit dem thermodynamischen Algorithmus ohne und mit Berücksichtigung der Gewebeperfusion berechnet und den Werten der Schlimmsten-Falls-Abschätzung gegenüber gestellt.

**Abbildung 6.29:** Erwärmung an der Spitze der Herzschrittmacherelektrode am Ende der simulierten MR-Sequenz von 2500 s Dauer bei leitender Verbindung zwischen Elektrodenkabel und Gehäuse und R-Magnetkonfiguration. Die maximale Erwärmung beträgt 46 mK bei Berücksichtigung der Gewebeperfusion.



Turbo Spin Echo MR-Sequenz mit 2500 s Dauer. Wie erwartet liegen die Werte der einfachen Abschätzung deutlich über den Erwärmungen, die mit dem thermodynamischen Algorithmus berechnet wurden. Die Berücksichtigung der Perfusion führt zu einer weiteren Verringerung der maximalen Erwärmung an der Elektrodenspitze in jedem Fall um ungefähr den Faktor vier.

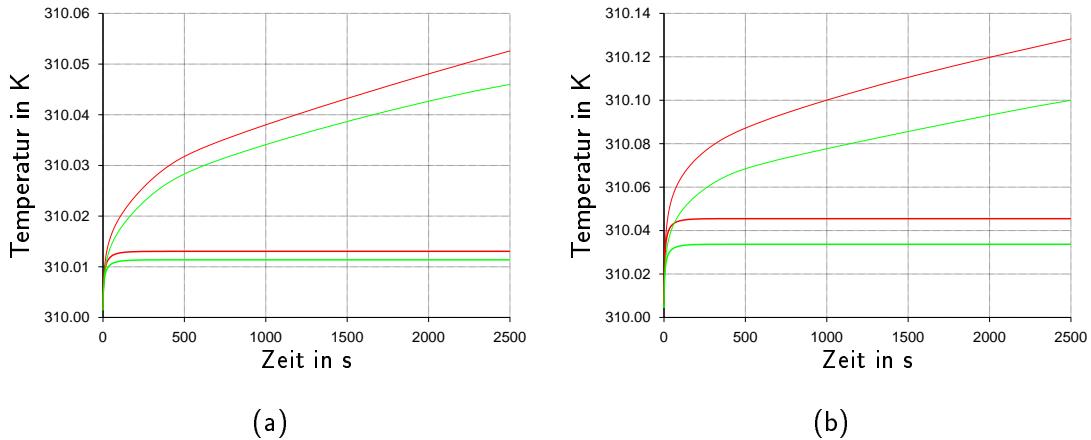
Bezüglich der Ausrichtung des statischen Magnetfelds zum Körpermodell ergaben sich beim R-Magneten höhere Erwärmungen als beim C-Magneten. Zusätzlich erzeugt eine leitende Verbindung zwischen Elektrode und Gehäuse größere Erwärmungen als ein vom Gehäuse isoliertes Elektrodenkabel. Bei Berücksichtigung der Perfusion ergibt sich beim R-Magneten und leitender Verbindung zwischen Kabel und Gehäuse eine maximale Erwärmung von 46 mK nach 2500 s. Dieser Fall ist in Abbildung 6.29 dargestellt.

Abbildung 6.30 zeigt die zeitliche Entwicklung der Erwärmung an der Spitze der Herzschrittmacherelektrode während der fiktiven MR-Sequenz im R- und C-Magneten mit und ohne leitender Verbindung, sowie mit und ohne Gewebeperfusion. Berücksichtigt man die Gewebeperfusion so ergeben sich nicht nur deutlich niedrigere maximale Erwärmungen an der Elektrodenspitze sondern auch unterschiedliche Kurvenverläufe.

Anstatt des exponentiellen Verlaufs der Temperaturkurve bei Vernachlässigung der Gewebeperfusion ergibt sich nach kurzer Zeit ein stationärer Zustand der Temperatur an der Elektrodenspitze, der sich bis zum Ende der Sequenz trotz weiterer HF-Einstrahlung nicht mehr ändert. Ohne Berücksichtigung der Gewebeperfusion erreicht die Temperaturkurve selbst nach 2500 s keinen stationären Zustand konstanter Elektrodentemperatur.

Dies ähnelt den experimentellen Beobachtungen in Abschnitt 6.2.1, bei denen bei der Temperaturnessung in Salzwasserphantomen ebenfalls nach kurzer Zeit eine stationäre Temperatur erreicht wurde. Dieses Verhalten wurde mit der Entstehung einer Konvektionszone an der Elektrodenspitze in Verbindung gebracht. Die Vermutung wird durch das numerische Ergebnis bekräftigt, da in diesem Fall durch den Blutfluss eine Wärmekonvektion hervorgerufen wurde.

Da die Berücksichtigung einer Gewebeperfusion den tatsächlichen Verhältnissen im menschlichen Körper entspricht, wäre es denkbar bei zukünftigen Untersuchungen das numerische Verfahren nach Erreichen eines stationären Zustands abzubrechen, um so Rechenzeit zu sparen.



**Abbildung 6.30:** Vergleich der Erwärmung an der Herzschrittmacherelektrode mit (dicke Linien) und ohne (dünne Linien) Berücksichtigung der Gewebeperfusion in der C-Magnet- (a) und der R-Magnetkonfiguration (b) bei leitender Verbindung (rote Linien) zwischen Elektrode und Schrittmachergehäuse und isolierter Elektrode (grüne Linien) während einer MR-Sequenz von 2500 s Dauer.

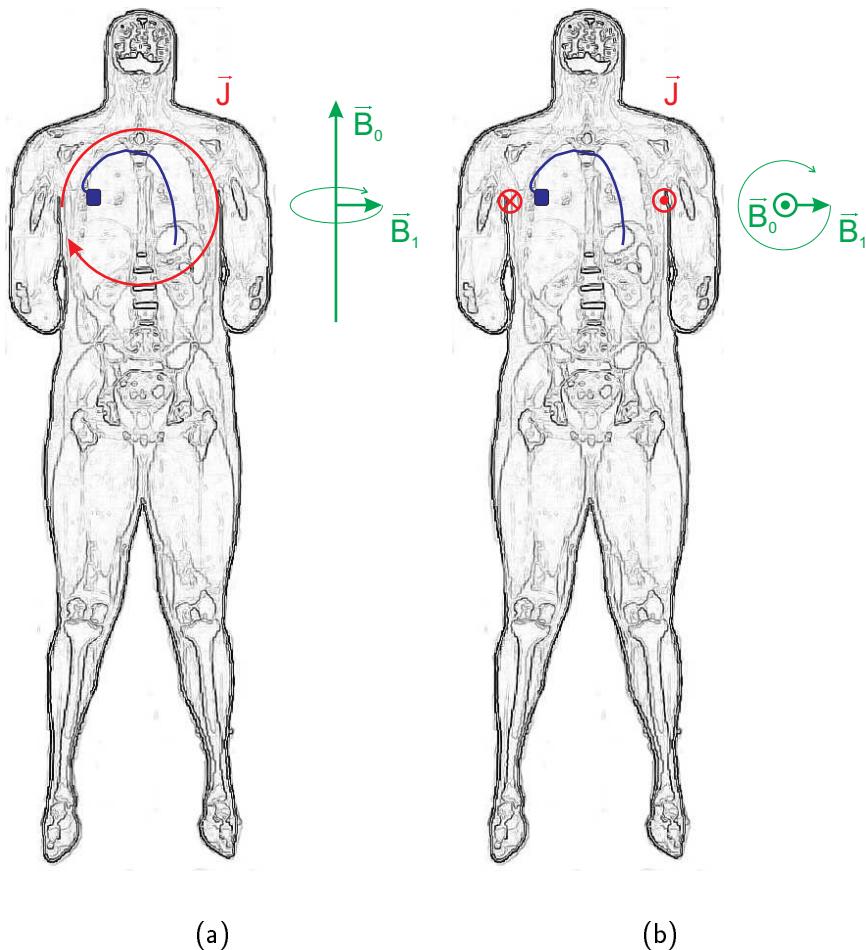
Bei Vernachlässigung der Gewebeperfusion wird die Erwärmung an der Elektrode überschätzt.

Bei dieser Simulation wurde allerdings davon ausgegangen, dass das thermoregulatorische System des menschlichen Körpers die Bluttemperatur konstant auf 310 K gehalten hat, was ab einer gewissen HF-Belastung nicht mehr ohne weiteres vorausgesetzt werden darf, da dann die zusätzliche Wärme nicht mehr durch physiologische Massnahmen abgeführt werden kann und sich der Körperkern über den physiologischen Normalbereich erwärmen kann (IRPA, 1991).

In Übereinstimmung mit der Kabelphantomstudie aus Abschnitt 6.2.6 zeigte sich, dass die Richtung des magnetischen Grundfelds zur Ebene in der das Elektrodenkabel verläuft einen Einfluss auf die entstehende Erwärmung an der Elektrodenspitze hat. Abbildung 6.31 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Allerdings hat Abbildung 6.28 gezeigt, dass der elektrische Feldverlauf im inhomogenen Körpermodell nicht den Abhängigkeiten nach Gleichung (6.38) folgt. Dies bedeutet, dass sich im menschlichen Körper keine globalen rotationssymmetrischen Wirbelströme wie in Salzwasserphantomen ergeben (vgl. Abbildung 6.20). Die Erwärmung des Körpers im C-Magneten stimmt aber auch hier vermutlich mit der Erwärmung ohne Elektrode weitgehend überein, d. h. dass im C-Magneten praktisch keine zusätzliche Erwärmung an der Elektrodenspitze auftritt (vgl. Abschnitt 6.2.6).

Die Ergebnisse dieser Studie gaben in keinem untersuchten Fall einen Hinweis auf eine mögliche gewebeschädigende Wirkung durch zu große Erwärmungen der Elektrodenspitze während der simulierten MR-Sequenz. Weiterhin zeigte sich, dass eine Übertragung der Ergebnisse von Salzwasserphantomstudien nicht ohne Einschränkungen möglich ist, da der inhomogene perfundierte menschliche Körper ganz andere Rahmenbedingungen vorgibt.

Ein Hinweis auf die in dieser Studie nachgewiesene Effizienz der menschlichen Gewebeperfusion findet sich in der Arbeit von LUECHINGER (2002), bei der in lebenden Schweinen die Temperatur in den Schrittmacherelektroden während einer MR-Sequenz gemessen wurde. Trotz teilweise erheblicher Temperaturzunahmen von einigen Kelvin an der Elektrodenspitze gemessen im Inneren des Elektrodenkabels, zeigte sich nach der Sektion des Herzgewebes keinerlei Hinweis auf eine thermische Schädigung des Schweineherzens.



**Abbildung 6.31:** Vereinfachte Darstellung der Wirbelstromwege im menschlichen Körper bei verschiedenen Richtungen des statischen Grundfelds bei der Magnetresonanztomographie. In Bild (a) liegt die lange Körperachse parallel zur Richtung des statischen magnetischen Feldes  $B_0$ . Der angedeutete Herzschrittmacher mit Elektrode (blau) liegt in einer Ebene, in der auch Wirbelströme fließen. Dadurch kommt es zu mehr Erwärmung als bei Bild (b), bei dem das statische Feld  $B_0$  senkrecht zur Schrittmacherebene steht.

Daraus folgt, dass der Nachweis einer gewebeschädigenden Erwärmung an der Elektrodenspitze in einer Salzwasserphantomstudie nicht zu dem Schluss führen darf, dass dies auch automatisch bei einem Patienten der Fall ist. Im menschlichen Körper ist daher in der Regel mit deutlich niedrigeren Erwärmungen an Elektrodenspitzen zu rechnen, die in den meisten Fällen keine gewebeschädigende Wirkung zeigen dürften.

Aus dieser Studie darf allerdings keine generelle Unbedenklichkeitserklärung abgeleitet werden, da nur ein Oberkörpermodell mit einer möglichen Herzschrittmacher- und Kabellage simuliert wurde. Weiterhin sind Verbesserungen bezüglich der Modellierung des Elektrodenkabels notwendig, um die HF-Eigenschaften der oft spiralförmig gewickelten Kabel darzustellen, was im Rahmen dieser Untersuchungen vernachlässigt wurde. Es kann aber konstatiert werden, dass bei der „normalen“ Art, die Herzschrittmacherkabel im Körper zu verlegen, d.h. in der „Frontalebene“, im C-Magneten mit großer Sicherheit keine gewebeschädigenden Erwärmungen auftreten.

## 6.4 Wissenschaftlicher Beitrag der Arbeit

In diesem Kapitel wurde die Erwärmung von Elektroden und Kabeln in Salzwasserphantomen und dem menschlichen Körper durch die HF-Pulse eines MR-Tomographen betrachtet. Dabei wurden nach einer Einführung in die Thematik mit einigen Ausführungen zum Stand der Forschung zunächst eigene experimentelle Messungen an einem Oberkörperphantom beschrieben, mit denen die Ergebnisse anderer Arbeitsgruppen nachvollzogen werden konnten.

Um ein tieferes Verständnis für die in den Phantomexperimenten beobachteten Erwärmungen zu erhalten, wurde in den folgenden Abschnitten eine feldtheoretische Näherungslösung für die Amplitude des elektrischen Feldes in einem quaderförmigen Plexiglasphantom abgeleitet, um mit Hilfe der Feldverteilung eine Aussage über die Abhängigkeit der Erwärmung an Kabel- und Elektrodenspitzen von der Positionierung im Phantom machen zu können.

Mit Hilfe einer numerischen Studie als Ergänzung zu den experimentellen und theoretischen Untersuchungen wurde die elektrische Feldverteilung in 384 numerischen Modellen eines salzwassergefüllten quaderförmigen Plexiglasphantoms mit darinliegendem Kabel in unterschiedlichen MR-Szenarien untersucht. Neben vier unterschiedlichen Kabelpositionen wurde die Richtung des statischen Grundfelds, die Pulsdauer, die Leitfähigkeit der Salzlösung und die Form der Kabelspitze variiert.

Ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit der theoretischen Näherungslösung zeigte, dass der elektrische Feldverlauf im Phantom ab einer Leitfähigkeit der Salzlösung von 0,5 S/m sehr gut wiedergegeben werden kann. Spitze Kabelenden ergaben in vielen Fällen die doppelte Energiedeposition an der Kabelspitze im Vergleich zu flachen Kabelenden. Die numerischen Ergebnisse zeigten weiterhin, dass die Erwärmung an der Kabelspitze nicht nur von der Bauform der Spitze abhängen, sondern insbesondere von der Orientierung der Kabelebene bezüglich der Richtung des statischen magnetischen Grundfelds und damit der Richtung der resultierenden Wirbelströme. Kam ein Kabel in einer der Wirbelstromebenen zu liegen, so erhöhte sich die Energiedeposition an der Kabelspitze. Besonders große Werte wurden erzielt, wenn das Kabel entlang der Wirbelstromlinien lag. Diese Werte erhöhten sich weiter je weiter außen im Phantom das Kabel zu liegen kam.

Daraus folgte automatisch die Ableitung einiger Verhaltensregeln zur Minimierung der Risiken für Patienten mit Implantaten während einer MR-Untersuchung. Wenn die Lage des Implantats bekannt ist, so kann durch eine entsprechende Lagerung des Patienten unter Berücksichtigung der magnetischen Grundfeldrichtung eine Reduktion der Erwärmung an der Elektrodenspitze erreicht werden. Wenn eine geschickte Lagerung des Patienten nicht möglich ist, so kann durch die Wahl eines MR-Tomographen mit anderer Bauform und Grundfeldrichtung eine Risikominimierung versucht werden.

Mit Hilfe einer einfachen Abschätzung wurde bei einigen ausgesuchten numerischen Modellen eine obere Grenze für die Erwärmung an der Kabelspitze berechnet und mit den Ergebnissen des thermodynamischen Algorithmus verglichen. Es zeigte sich, dass die berechneten Erwärmungen bei Berücksichtigung des Wärmetransports im Salzwasserphantom mit den Ergebnissen eigener und anderer experimenteller Studien vergleichbar sind.

Die numerischen Ergebnisse wurden im folgenden auf zwei experimentelle Arbeiten mit Salzwasserphantomen und Elektroden übertragen, die zu unterschiedlichen Ergebnissen und Bewertungen der Gefährdung für Patienten kamen. Es zeigte sich, dass die experimentell gefundenen Abhängigkeiten der Erwärmung mit Hilfe der numerischen Ergebnisse bestätigt und aufgeklärt

werden konnten. Der bereits durch die numerische Studie abgeleitete Zusammenhang zwischen Kabelposition und -verlauf im Phantom und magnetischer Grundfeldrichtung konnte die unterschiedlichen Aussagen der experimentellen Studien durch eine Betrachtung der jeweiligen experimentellen Bedingungen neu bewerten. Dies lässt sich nun auch auf andere experimentelle Studien übertragen.

Das Kapitel schließt mit der Vorstellung zweier numerischer Studien mit hochaufgelösten Modellen des menschlichen Körpers. Im Rahmen dieser Studien wurde die Erwärmung von Tiefenhirnstimulations- und Herzschrittmacherelektroden durch HF-Pulse bei der MR-Tomographie untersucht. Es zeigte sich, dass in keinem untersuchten Modell eine gewebeschädigende Erwärmung nachgewiesen werden konnte. Eine gezielte Untersuchung des Kühlungseffektes der Gewebedurchblutung zeigte, dass die Wärmekonvektion durch den Blutfluss im menschlichen Körper einen entscheidenden Beitrag zur Abkühlung an Elektrodenspitzen leistet und auf keinen Fall vernachlässigt werden darf.

Die Ergebnisse dieses Kapitels machen besonders auf die Probleme bei der Bewertung experimenteller Resultate aus Salzwasserphantomstudien aufmerksam. Eine genauere Analyse der elektrischen Feldverteilungen in Phantomen und den menschlichen Körpermodellen ergaben sehr unterschiedliche Feldverläufe. Die homogen gefüllten Phantome ermöglichen die Ausbildung von großen globalen Wirbelstromgebieten, die im menschlichen Körper so nicht wiederzufinden sind. Dadurch sind die gemessenen Erwärmungen an den Elektroden in Phantomen deutlich größer. Da bei Salzwasserphantomen keine Wärmekonvektion durch eine Blutströmung berücksichtigt wird, sondern sich nur lokale Konvektionszonen ausbilden, fehlt bei diesen experimentellen Studien ein wichtiger Abkühlungsmechanismus, der zusätzlich zu den höheren gemessenen Temperaturen beiträgt. Salzwasserphantome überschätzen daher die Erwärmungseffekte in einem hohen Maß und müssen in den meisten Fällen als ungeeignet für eine Analyse der Patientensicherheit eingestuft werden.

Aus diesen Gründen muss die Aussagekraft von experimentellen Messungen an Phantomen zur Bewertung von Risiken für Patienten neu überdacht werden und damit auch geltende Sicherheitsbestimmungen. Die numerischen Ergebnisse dieser Arbeit geben Hinweise darauf, dass die tatsächlich resultierenden Erwärmungen an Elektroden in vielen Fällen als unbedenklich eingestuft werden können. MR-Untersuchungen scheinen bei vielen Patienten mit Implantaten möglich zu sein, insbesondere wenn der Lagerung eines Patienten im MR-Tomographen besondere Aufmerksamkeit gewidmet wird. Um diese Vermutungen zu bestätigen sind aber noch weitere Untersuchungen notwendig.

---

## Kapitel 7

# Magnetische Gradientenfelder bei der Magnetresonanztomographie

---

### 7.1 Einführung

#### 7.1.1 Gradientenfelder und Bildgebung

Zusätzlich zum statischen magnetischen Feld und dem Hochfrequenzfeld werden bei der MR-Tomographie noch magnetische Gradientenfelder während einer MR-Sequenz geschaltet. Diese Felder dienen dazu, dem Resonanzsignal aus dem Patientenkörper eine eindeutige Ortsinformation hinzuzufügen. Dazu werden drei Gradientenspulensysteme verwendet, deren Felder das statische Magnetfeld, welches hier in  $z$ -Richtung orientiert ist, überlagern und so entlang der drei Raumrichtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  unterschiedliche statische Magnetfeldstärken erzeugen. Typische Werte für die Gradientenfeldstärken liegen im Bereich von 5 mT/m bis 40 mT/m.

Die Selektion einer Schicht im Patientenkörper wird mit dem  $z$ -Gradienten durchgeführt<sup>1</sup>. Der  $z$ -Gradient  $G_z = \frac{\partial B_z}{\partial z}$  wird während der HF-Anregung geschaltet und sorgt dafür, dass in jeder Ebene in  $z$ -Richtung das statische Magnetfeld eine andere Stärke hat und damit die Präzessionsfrequenz der Spins verschieden ist:

$$\omega_l(z) = \gamma \cdot (B_0 + G_z \cdot z) = \gamma \cdot (B_0 + \frac{\partial B_z}{\partial z} \cdot z) . \quad (7.1)$$

Wird ein Feldgradient in  $z$ -Richtung geschaltet, so werden durch die HF-Anregung nur die Spins ausgelenkt, die die passende Präzessionsfrequenz besitzen. Die Steilheit des  $z$ -Gradienten und die Bandbreite des HF-Pulses legen dabei die Dicke der resonanten Schicht fest.

Der  $y$ -Gradient  $G_y = \frac{\partial B_y}{\partial y}$  dient zur Kodierung der Phaseninformation und wird zwischen dem anregenden HF-Puls und dem Auslesen der Antennensignale geschaltet. Ist der  $y$ -Gradient ausgeschaltet, so präzedieren alle Spins in Phase. Wird der  $y$ -Gradient eingeschaltet, so präzedieren

---

<sup>1</sup> Die Wahl der Raumrichtungen erfolgt hier den gängigen Konventionen entsprechend. Die Raumrichtungen können aber auch anders benannt werden.

die Spins entlang des Phasenkodiergradienten unterschiedlich schnell. Durch die unterschiedlichen Phasenverschiebungen der Spins kann so die  $y$ -Koordinate kodiert werden. Der Phasendrehwinkel  $\varphi_p$  ist abhängig von der Dauer  $T_y$  des  $y$ -Gradienten (DÖSSEL, 2000):

$$\varphi_p(y) = -\gamma \cdot G_y \cdot y \cdot T_y . \quad (7.2)$$

Der  $x$ -Gradient  $G_x = \frac{\partial B_z}{\partial x}$  dient zur Kodierung der Frequenzinformation und wird während des Auslesens der Antennensignale geschaltet. Dieser Gradient führt zu einer Variation des Magnetfeldes in  $x$ -Richtung und damit zu unterschiedlichen Präzessionsfrequenzen der Spins entlang der Frequenzkodierrichtung:

$$\omega_l(x) = \gamma \cdot (B_0 + G_x \cdot x) = \gamma \cdot (B_0 + \frac{\partial B_z}{\partial x} \cdot x) . \quad (7.3)$$

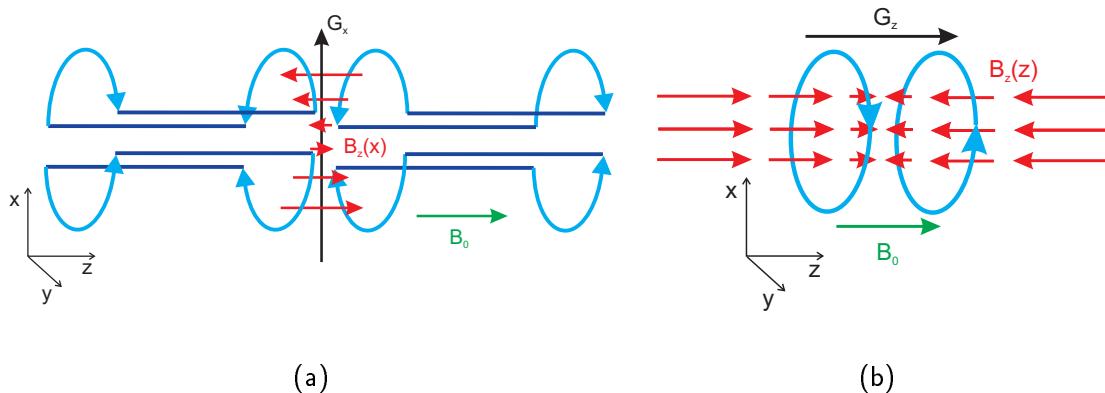
Es muss jedoch berücksichtigt werden, dass für die Bildgebung nur die lokale Änderung des statischen Magnetfeldes durch die Komponente  $\frac{\partial B_z}{\partial x}$  der einzelnen Gradienten wichtig ist, die Spulensysteme aber auch zusätzliche Magnetfeldkomponenten  $\frac{\partial B_x}{\partial z}$  und  $\frac{\partial B_y}{\partial z}$  erzeugen. Diese Komponenten der Gradienten werden nicht für die Bildgebung genutzt, induzieren aber trotzdem Ströme im Körper des Patienten. Daher müssen auch diese Komponenten bei einer Betrachtung der Auswirkungen der magnetischen Gradientenfelder bei der MR-Tomographie mit berücksichtigt werden. So ergibt sich für den magnetischen Feldgradienten  $\mathbf{G}$  ein Tensor mit neun Komponenten:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_x^x & G_x^y & G_x^z \\ G_y^x & G_y^y & G_y^z \\ G_z^x & G_z^y & G_z^z \end{bmatrix} . \quad (7.4)$$

Abbildung 7.1 zeigt den schematischen Aufbau eines  $x$ - und eines  $z$ -Gradientensystems mit den jeweils erzeugten Feldgradienten. Das  $x$ - und das  $y$ -Gradientensystem werden in dieser Abbildung mittels vier Sattelpulen aufgebaut, die die Gradientenstärke  $B_z$  in  $x$ - und  $y$ -Richtung beeinflussen. Der  $z$ -Gradient wird durch zwei kreisförmige parallele Spulen erzeugt, die senkrecht zur  $z$ -Achse angeordnet sind. Weitere Informationen über den Aufbau und die Schaltung der Gradientenfelder finden sich bei DÖSSEL (2000), MORNEBURG (1995) und CHEN UND HOULT (1989).

### 7.1.2 Gefahren durch magnetische Gradientenfelder

Moderne Bildgebungsverfahren erfordern starke Gradientenfelder, die sehr schnell an- und abgeschaltet werden können. Die Rampenzeiten beim An- und Abschalten eines Gradienten liegen heutzutage im Bereich von 1 ms oder sogar darunter (DÖSSEL, 2000). Innerhalb dieser Zeit erreicht der Gradient seine volle Stärke und bleibt je nach Pulssequenz für einige Millisekunden stehen und fällt danach wieder ab. Während der An- und Abstiegszeiten der Gradientenfelder werden im Körper des Patienten Ströme induziert, da sich nur zu diesen Zeitpunkten der Fluss der magnetischen Induktion  $\vec{B}$  durch den Körper ändert und dann nach dem Induktionsgesetz, welches sich in Gleichung (2.1) wiederfindet, ein elektrisches Wirbelfeld und damit Ströme im Körper des Patienten induziert.



**Abbildung 7.1:** Beispiel für mögliche Gradientenspulenformen zur Erzeugung einer zusätzlichen ortsabhängigen Magnetfeldkomponente, die das statische Grundfeld  $B_0$  überlagert. Der x-Gradient in Bild (a) wird hier von vier Sattelpulsen erzeugt, die eine zusätzliche Magnetfeldkomponente  $B_z(x)$  bewirken, die entlang der x-Achse ihre Stärke ändert. Der y-Gradient wird ebenfalls mit einem Sattelpulsenystem erzeugt, welches einem um  $90^\circ$  um die z-Achse rotierten x-Gradientenspulen system entspricht. Der z-Gradient in Bild (b) wird durch zwei kreisförmige Spulen erzeugt. In beiden Abbildungen ist die jeweilige Stromflussrichtung durch die Spulen mit hellblauen Pfeilen markiert.

Der Effekt dieser induzierten Ströme ist maßgeblich von dem Frequenzgehalt des Gradientenpulses abhängig. Bei Rampenanstiegs- und Rampenabfallszeiten im Bereich unter einer Millisekunde und Repetitionszeiten von einigen Millisekunden enthalten die Gradientenpulse oft Gleichanteile und Frequenzen bis in den Kiloherzbereich. In diesem Frequenzbereich muss in erster Linie mit der Stimulation von Muskel- und Nervengewebe gerechnet werden. Die durch die Gradienten verursachten Energieverluste im Gewebe sind aufgrund der niedrigen Frequenzen sehr gering und verursachen keine relevante Erwärmung. In Abschnitt 4.2.2 werden die physiologischen Hintergründe der Muskel- und Nervenstimulation ausführlich beschrieben.

Die Stimulation von oberflächlicher Muskulatur scheint auf den ersten Blick nicht weiter gefährlich zu sein. Dennoch können dabei Bewegungsartefakte im MR-Bild durch die unerwünschte Bewegung des Patienten verursacht werden. Ein größeres Problem ist aber, dass solche Stimulationen für den Patienten äußerst schmerhaft sein können. In der Literatur finden sich Berichte über die experimentelle Untersuchung von Auswirkungen verschiedener Gradientenpulsdauern, Spulenkonfigurationen und Feldstärken an freiwilligen Testpersonen z. B. bei NYENHUIS ET AL. (1999).

Neben der mitunter schmerzhaften Stimulation von Skelettmuskulatur können Gradientenfelder bei entsprechender Stärke auch tieferliegende Strukturen wie z. B. den Herzmuskel erreichen und im ungünstigsten Fall durch eine unerwünschte Stimulation der Herzmuskel zum Kammerflimmern und damit zum Tod des Patienten führen. Auch wenn es heute technisch möglich ist, immer schnellere und stärkere Gradientenspulensysteme zu entwickeln, muss in jedem Fall sichergestellt werden, dass während einer MR-Sequenz die Sicherheitsgrenzwerte eingehalten werden (ICNIRP, 1998). In Abschnitt 4.3.2 werden die grundlegenden Basisgrenzwerte für die maximal zulässigen Stromdichten im Körper angegeben, die bei einer Frequenz von 1 kHz für beruflich exponierte Personen  $10 \text{ mA/m}^2$  nicht überschreiten dürfen.

Anhand von experimentellen Studien und theoretischen Überlegungen versuchen verschiedene Autoren, Zusammenhänge zwischen Gradientenfeldstärke, Pulsdauer und -frequenz zu erarbeiten, um die Gefährdung von Patienten a priori abschätzen und zulässige Grenzwerte für Gradientensysteme ableiten zu können (IRNICH & SCHMITT, 1995; NYENHUIS ET AL., 1997; BOWTELL & BOWLEY, 2000). Darüber hinaus ist es möglich mit Hilfe der numerischen Feldtheorie Gradientenpulsformen zu untersuchen. Allerdings finden sich darüber bisher nur wenig Studien in der Literatur. In einer Arbeit von ŠIMUNIĆ ET AL. aus dem Jahr 1996 wird eine einfachen Gradientenpulsform mit einem grob aufgelösten Torsomodell untersucht. Diese Methode und die in dieser Arbeit daraus entwickelten Erweiterungen und numerischen Verfahren werden im folgenden vorgestellt.

### 7.1.3 Numerische Berechnung von Gradientenpulsen

Die numerische Berechnung der durch Gradientenpulse induzierten Ströme ist zunächst nicht einfach im Frequenzbereich möglich, da die anregenden Gradientenpulsformen nicht sinusförmig sind. Die Möglichkeit, das Problem im Zeitbereich zu betrachten, scheitert in der Regel an dem restriktiven Stabilitätskriterium für die maximal zulässige stabile Zeitschrittweite für die Iteration im Zeitbereich nach Gleichung (2.59). Bei Gradientenpulsdauern im Millisekundenbereich ergeben sich bei maximal zulässigen Zeitschritten von einigen Pikosekunden mehrere Millionen Zeitschritte (vgl. mit Tabelle 2.1), was in einer Rechenzeit von mehreren Monaten resultieren würde.

Da auch diese Möglichkeit ausscheidet, muss die Pulsform in eine Fourierreihe entwickelt werden. Anhand der Reihenentwicklung ist es möglich, die Pulsform mit einer Auswahl an Harmonischen darzustellen und jede einzelne Frequenz als sinusförmige Anregung mit dem Frequenzbereichslöser W3 von MAFIA zu berechnen. In der Arbeit von ŠIMUNIĆ ET AL. (1996A) wurde dieser Ansatz zum ersten Mal umgesetzt. Allerdings wurde in dieser Arbeit keine explizite Fourierzerlegung der Gradientenpulsform und Fourerkoeffizienten durchgeführt, sondern es wurden nur die berücksichtigten Frequenzen der Harmonischen angegeben. Darüber hinaus enthält diese Studie nur die Betrachtung einer einfachen trapezförmigen Gradientenpulsform.

In den folgenden Abschnitten wird daher die Fourierzerlegung von Gradientenpulsen ausführlich beschrieben. Zunächst wird eine Zerlegung für den einfachen trapezförmigen Gradientenpuls angegeben und danach eine Zerlegung für einen doppelten trapezförmigen Gradientenpuls. Mit beiden Pulsformen werden Simulationsrechnungen mit einem hochauflösten numerischen Modell eines menschlichen Oberkörpers durchgeführt und bei jeder berücksichtigten harmonischen Frequenz der Pulsformen die maximale Stromdichte im Herzmuskel erfasst. Als Parameter für die Gradientenpulsformen dienen zum einen die Angaben aus ŠIMUNIĆ ET AL. (1996A), zum anderen werden Werte in der Größenordnung aktueller klinischer Sequenzen verwendet. Aus den Einzelrechnungen werden die maximalen Summenstromdichten berechnet und mit den zulässigen Grenzwerten verglichen. Eine Diskussion über Grenzen und Möglichkeiten dieses Verfahrens schließt das Kapitel ab.

Teile dieser u. a. als Studienarbeit am Institut für Biomedizinische Technik der Universität Karlsruhe (TH) durchgeführten Arbeit wurden bereits publiziert (RICK ET AL., 2002).

## 7.2 Fourierreihenentwicklung von Gradientenpulsen

Jede periodische Funktion in der Zeit mit der Periodendauer  $T$  kann in eine Fourierreihe entwickelt werden (BRONŠTEJN & SEMENDJAEV, 1991). Mit dem Zusammenhang  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ergibt sich folgende Reihenentwicklung:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) . \quad (7.5)$$

Die Schwierigkeit bei der Fourierreihenentwicklung ist die Bestimmung der Fourierkoeffizienten  $a_0$ ,  $a_n$  und  $b_n$ , bei deren Berechnung Produktintegrale aus der darzustellenden Funktion  $f(t)$  mit Sinus- oder Kosinusfunktionen zu lösen sind.

Oft geben sich durch die Symmetrieeigenschaften der Ausgangsfunktion  $f(t)$  Vereinfachungen bezüglich der Fourierkoeffizienten. So verschwinden bei geraden Funktionen die Koeffizienten  $b_n$  und bei ungeraden Funktionen die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_n$ . Der Koeffizient  $a_0$  stellt den Gleichanteil der Ausgangsfunktion  $f(t)$  dar. Der Gleichanteil einer Pulsform trägt nicht zu der Entstehung von Wirbelströmen bei.

Die harmonischen Frequenzen  $n \cdot \omega = n \cdot 2\pi/T$  ergeben sich aus der Gesamtdauer  $T$  der Gradientenpulsform. Eine weiterführende Darstellung der Grundlagen der Fourierreihenentwicklung findet sich in Anhang A.3.

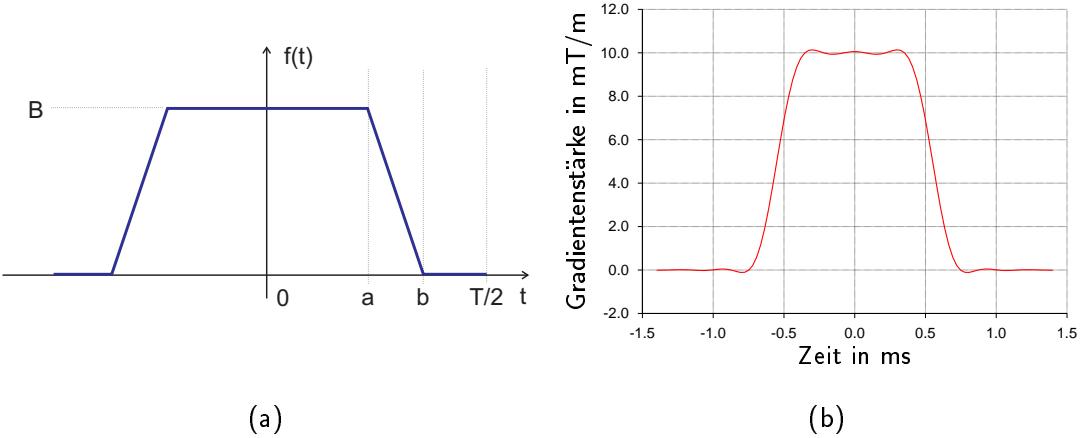
Zur näherungsweisen Darstellung einer Funktion reicht es im allgemeinen aus, nur einige wenige Terme der Reihenentwicklung (7.5) zu berücksichtigen. Dabei ist es zweckmäßig, diejenigen Terme auszuwählen, die über die betragsmäßig größten Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  verfügen, da diese als Gewichtsfaktoren für die einzelnen Reihenterme fungieren und die Darstellung der approximierten Funktion  $f(t)$  am meisten beeinflussen.

### 7.2.1 Fourierreihe einer einfachen trapezförmigen Gradientenpulsform

Abbildung 7.2a zeigt eine einfache trapezförmige Gradientenpulsform, wie sie in vielen MR-Sequenzen Verwendung findet. Um die Fourierreihenentwicklung zu vereinfachen, wurde die Pulsform achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse ausgerichtet. Die Pulsform hat eine Rampenanstiegs- und Rampenabfallszeit von  $b - a$ . Die Maximalamplitude beträgt  $B$  bei einer Periodendauer  $T$ . Um diese Gradientenpulsform in eine Fourierreihe entwickeln zu können, ist es zunächst notwendig, die Pulsform durch eine stückweise definierte Funktion  $f(t)$  darzustellen:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} \leq t \leq -b \\ \frac{B}{b-a} \cdot (t + b) & -b < t < -a \\ B & -a \leq t \leq a \\ \frac{B}{a-b} \cdot (t - b) & a < t < b \\ 0 & b \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases} . \quad (7.6)$$

Ausgehend von dieser stückweise definierten Funktion  $f(t)$  können die Fourierkoeffizienten  $a_0$  und  $a_n$  berechnet werden. Die Koeffizienten  $b_n$  sind gleich Null, da die Funktion  $f(t)$  gerade



**Abbildung 7.2:** Beispiel für eine Fourierrekonstruktion eines einfachen trapezförmigen MR-Gradientenpulses. Die Pulsform wurde in der schematischen Zeichnung (a) so angeordnet, dass sie symmetrisch um  $t = 0$  s ist, was die Fourierreihenentwicklung vereinfacht. Die charakteristischen Größen, wie die Zeitpunkte für den beginnenden Rampenabfall  $a = 0,4$  ms und das Rampenende  $b = 0,7$  ms, die Gesamtpulsdauer  $T = 2,8$  ms, sowie die Stärke des Gradientenpulses  $B = 10$  mT/m sind in der Zeichnung mit angegeben. Die Steilheit der Rampe beträgt ca.  $33,3$  mT/(m·ms). Bild (b) zeigt die Rekonstruktion der Rampenfunktion mit Hilfe einer Fourierreihentwicklung bis zur fünften Ordnung.

ist. Der komplette Rechenweg befindet sich in Anhang A.3.1. Für die Fourierreihenkoeffizienten ergibt sich:

$$a_0 = \frac{2B \cdot (b + a)}{T},$$

$$a_n = \frac{B \cdot T}{(b - a) \cdot \pi^2} \cdot \frac{\cos(n\omega a) - \cos(n\omega b)}{n^2}.$$

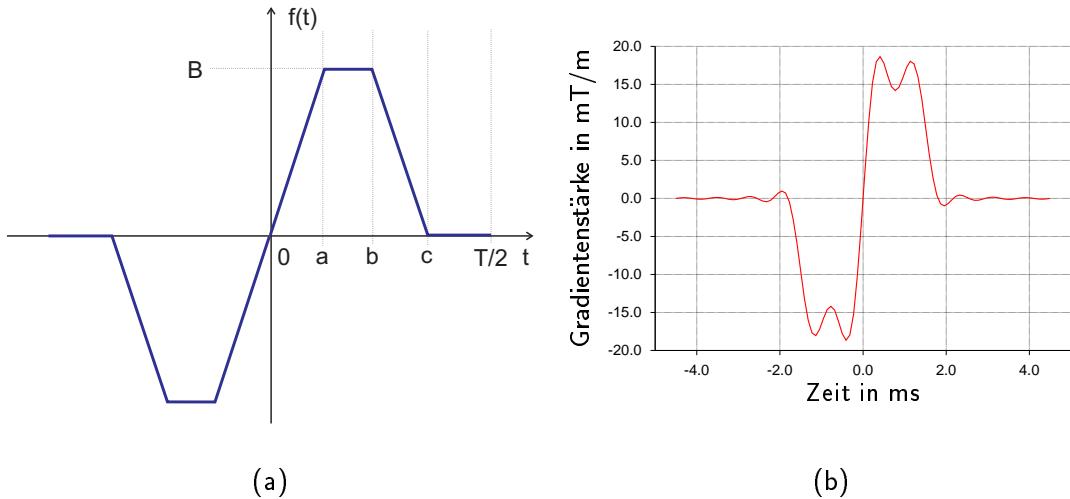
Daraus ergibt sich als Reihenentwicklung für die einfache trapezförmige Gradientenpulsform:

$$f(t) = \frac{B \cdot (b + a)}{T} + \frac{B \cdot T}{(b - a) \cdot \pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cos(n\omega a) - \cos(n\omega b)}{n^2} \cdot \cos(n\omega t) \right). \quad (7.9)$$

Abbildung 7.2b zeigt die Fourierreihenentwicklung eines einfachen trapezförmigen Gradientenpulses nach Gleichung (7.9) mit einer Periodendauer von  $T = 2,8$  ms, einer maximalen Gradientenstärke von  $B = 10$  mT/m und den Zeitparametern  $a = 0,4$  ms und  $b = 0,7$  ms. Die Steilheit der Rampe beträgt ca.  $33,3$  mT/(m·ms). In der Darstellung wurden alle Harmonischen bis zur fünften Ordnung inklusive berücksichtigt.

### 7.2.2 Fourierreihe einer doppelten trapezförmigen Gradientenpulsform

Abbildung 7.3a zeigt eine doppelte trapezförmige Gradientenpulsform, die z. B. bei Gradienten-echo Sequenzen verwendet wird (DÖSSEL, 2000). Bei einer Turbo Spin Echo Sequenz kommen



**Abbildung 7.3:** Beispiel für eine Fourierrekonstruktion eines doppelten trapezförmigen MR-Gradientenpulses. Die Pulsform wurde in der schematischen Zeichnung (a) so angeordnet, dass sie symmetrisch zum Ursprung ist, was die Fourierreihenentwicklung vereinfacht. Die charakteristischen Größen, wie die Zeitpunkte für das Ende des Rampenanstieges  $a = 0,1 \text{ ms}$ , der Beginn des Rampenabfalls  $b = 1,5 \text{ ms}$  und das Ende des Rampenabfalls  $c = 1,6 \text{ ms}$ , die Gesamtpulsdauer  $T = 9,0 \text{ ms}$ , sowie die Stärke des Gradientpulses  $B = 16 \text{ mT/m}$  sind in der Zeichnung mit angegeben. Die maximale Steilheit der Rampe zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{ s}$  beträgt  $160,0 \text{ mT}/(\text{m}\cdot\text{ms})$ . Bild (b) zeigt die Rekonstruktion der Pulsform mit Hilfe einer Fourierreihenentwicklung bis zur elften Ordnung.

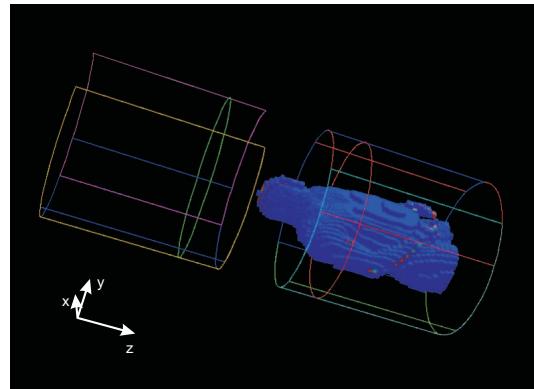
auch doppelte trapezförmige Pulsformen vor, allerdings ist bei diesem Sequenztyp die zweite Hälfte der Pulsform, die zur Schichtselektion verwendet wird, nur halb so groß. Dies ändert aber nichts am Rampenanstieg, dessen Steilheit entscheidend für die im menschlichen Körper induzierten Ströme ist.

Um die Fourierreihenentwicklung zu vereinfachen, wurde die Pulsform punktsymmetrisch zum Ursprung ausgerichtet. Die Pulsform hat zwei unterschiedliche Rampenanstiegs- und Rampenabfallszeiten von  $a$  und  $c - b$ . Die Maximalamplitude beträgt  $B$  bei einer Periodendauer  $T$ . Um diese Gradientenform durch eine Fourierreihe darstellen zu können, ist es zunächst notwendig, auch diese Pulsform durch eine stückweise definierte Funktion  $f(t)$  darzustellen:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} \leq t \leq -c \\ \frac{B}{b-c} \cdot (t + c) & -c < t < -b \\ -B & -b \leq t \leq -a \\ \frac{B}{a} \cdot (t) & -a < t < a \\ B & a \leq t \leq b \\ \frac{B}{b-c} \cdot (t - c) & b < t < c \\ 0 & c \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}. \quad (7.10)$$

Ausgehend von dieser stückweise definierten Funktion  $f(t)$  können die Fourierkoeffizienten  $b_n$  berechnet werden. Die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_n$  sind gleich Null, da die Funktion  $f(t)$  in diesem

**Abbildung 7.4:** Positionierung des hochauflösten Oberkörpermodells im Gradientenspulen- system mit einem Radius von  $r = 0,4$  m. Die Position des Körpermodells wurde entsprechend der Lage während einer MR-Untersuchung des Kopfes gewählt. Bei dieser Positionierung kommt das Herz des Körpermodells genau in der Mitte einer z-Gradientenspule zu liegen, was besonders hohe Wirbelstromdichten in der Herzgegend erzeugt.



Fall ungerade ist. Der komplette Rechenweg befindet sich in Anhang A.3.2. Für die Fourierkoefizienten ergibt sich nach einigen Zwischenrechnungen:

$$b_n = \frac{B \cdot T}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{\sin(n\omega c) - \sin(n\omega b)}{b - c} + \frac{\sin(n\omega a)}{a} \right).$$

Daraus ergibt sich als Reihenentwicklung für die doppelte trapezförmige Gradientenpulsform:

$$f(t) = \frac{B \cdot T}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\sin(n\omega c) - \sin(n\omega b)}{n^2 \cdot (b - c)} + \frac{\sin(n\omega a)}{n^2 \cdot a} \right) \cdot \sin(n\omega t) \right]. \quad (7.12)$$

Abbildung 7.3b zeigt die Fourierreihenentwicklung eines einfachen trapezförmigen Gradientenpulses nach Gleichung (7.12) mit einer Periodendauer von  $T = 9,0$  ms, einer maximalen Gradientenstärke von  $B = 16$  mT/m und den Zeitparametern  $a = 0,1$  ms,  $b = 1,5$  ms und  $c = 1,6$  ms. Die maximale Steilheit der Rampe zum Zeitpunkt  $t = 0$  s beträgt  $160,0$  mT/(m·ms) und ist damit um den Faktor 4,8 größer als die Steilheit der in Abbildung 7.2 gezeigten einfachen trapezförmigen Rampenfunktion. In der Darstellung wurden alle Harmonischen bis zur elften Ordnung inklusive berücksichtigt.

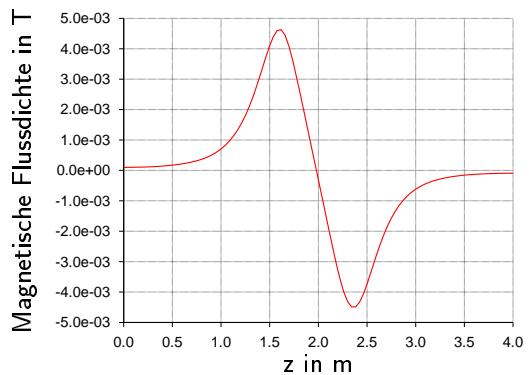
## 7.3 Numerische Modellierung

### 7.3.1 Aufbau des numerischen Modells

Abbildung 7.4 zeigt das numerische Modell, mit dem die Entstehung von Wirbelströmen im menschlichen Körper durch geschaltete MR-Gradientenfelder berechnet wurde. Das hochauflöste Modell eines Oberkörpers wurde mit einem Gradientenspulen- system bestehend aus Sattelpulensystemen für den  $x$ - und den  $y$ -Gradienten und einem Spulenpaar für den  $z$ -Gradienten umgeben.

Diese spezielle Kombination der Gradientenspulen wird auch „Golay“-Gradientensystem genannt (TURNER, 1993). Abhängig von einem inneren Radius  $r = 0,4$  m des Spulen- systems ergibt sich in dieser Konfiguration ein Abstand von  $d_s = 0,78 \cdot r = 0,312$  m der Sattelpulsen,

**Abbildung 7.5:** Ein Beispiel für den Verlauf der magnetischen Flussdichte der  $z$ -Gradientenspulen entlang der  $z$ -Achse. Die Stromstärke durch die Gradientenspulen beträgt 3 200 A, um im Zentrum des Spulensystems bei  $z = 2$  m einen Feldgradienten von 16 mT/m zu erzeugen.



jede mit einer Länge von  $l = 2,13 \cdot r = 0,852$  m. Der Abstand der  $z$ -Gradientenspulen beträgt bei diesem Spulensystem  $d_z = 1,73 \cdot r = 0,692$  m.

Das Spulensystem wurde so bezüglich dem Körpermodell positioniert, dass der Kopf des Modells im Zentrum des Gradientenspulensystems zu liegen kam, was eine MR-Untersuchung des Kopfes wiedergibt. Als Folge davon befindet sich die Herzregion des Körpermodells im Zentrum einer der  $z$ -Gradientenspulen.

Das numerische Modell besteht aus über 1 000 000 Voxeln bei einer Länge von 3 m in  $x$ - und  $y$ -Richtung und 4 m in  $z$ -Richtung. Um die Ströme in der Herzgegend genauer erfassen zu können wurde die Gitterschrittweite von 25 mm bis auf 5 mm in der Herzgegend in jeder Raumrichtung reduziert. Die dielektrischen Gewebeparameter wurden mit Hilfe von Gleichung (3.15) nach GABRIEL ET AL. (1996C) für jede berechnete Frequenz bestimmt.

### 7.3.2 Durchführung der numerischen Modellierung

Ausgehend von der Periodendauer  $T$  wurden zunächst die Frequenzen  $n \cdot f_h = n/T = n \cdot \omega/(2\pi)$  der Harmonischen bestimmt. Danach wurde bei den jeweiligen Frequenzen mit dem Frequenzbereichslöser W3 des Programmpaketes MAFIA mit dem PSBCGR-Algorithmus unter Verwendung der Curl-Curl-Eigenwertgleichung (siehe Abschnitt 2.3) Berechnungen mit einem leeren Gradientenspulensystem durchgeführt, um die notwendigen Stromstärken in den Spulensystemen zur Erzeugung der gewünschten Gradientenstärke zu ermitteln. Bei dem hier betrachteten Golay-Gradientensystem besteht zwischen Gradientenstärke und Stromstärke in den Gradientenspulen ein linearer Zusammenhang. Diese Berechnungen wurden für das  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Gradientensystem separat ausgeführt.

Abbildung 7.5 zeigt den Verlauf der  $z$ -Komponente der magnetischen Flussdichte der  $z$ -Gradientenspule entlang der  $z$ -Achse bei einer Stromstärke von 3 200 A. Im Zentrum des Spulensystems entsteht dadurch eine Feldgradient von 16 mT/m.

Mit den so ermittelten Stromstärkewerten wurde dann bei jeder Frequenz das elektromagnetische Feldproblem im Frequenzbereich gelöst. Es zeigte sich, dass bei den Frequenzen im Bereich bis zu einigen Kilohertz schon nach 2 000 Iterationsschritten eine sehr gute Konvergenz der Lösung beobachtet werden konnte. Aus den elektrischen Feldern wurden dann die Stromdichten berechnet und die maximalen Stromdichten im Herzmuskel erfasst.

Gradient	a in ms	b in ms	c in ms	T in ms	B in mT/m	I in A
$G_x$	5,9	6,0	-	18,3	4,0	800
$G_y$	1,2	1,3	-	9,1	8,0	1 600
$G_z$	0,1	1,5	1,6	9,0	16,0	3 200
$G_{xyz}$	0,4	0,7	-	2,8	10,0	2 000

**Tabelle 7.1:** Parameter der vier berechneten Gradientenpulsformen. Die Gradientenpulsformen für die Gradienten  $G_x$ ,  $G_y$  und  $G_z$  entsprechen denen einer klinischen Gradientenecho-Sequenz. Die Gradienten  $G_x$  und  $G_y$  sind dabei einfache trapezförmige Gradientenpulse. Der  $G_z$ -Gradient ist ein doppelter trapezförmiger Gradientenpuls. Der  $G_{xyz}$ -Gradient entspricht der in der Arbeit von ŠIMUNIĆ ET AL. (1996A) verwendeten Pulsform und wurde hier zu Vergleichszwecken verwendet.

### 7.3.3 Parameter der modellierten Gradientenpulsformen

Im Rahmen dieser Arbeit wurden insgesamt sechs Gradientenpulse untersucht. Zunächst wurde der von ŠIMUNIĆ ET AL. (1996A) verwendete einfache trapezförmige Gradientenpuls  $G_{xyz}$  mit den  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Gradientenspulen berechnet, um die Ergebnisse mit der Arbeit von ŠIMUNIĆ ET AL. vergleichen zu können. Dabei wurde in Übereinstimmung mit den Angaben von ŠIMUNIĆ ET AL. nur die erste, dritte, fünfte und siebte Harmonische berücksichtigt.

Danach wurde ein Sequenzprotokoll einer klinischen Gradientenecho-Sequenz (GRE) ausgewertet und die zugehörigen Gradientenpulse berechnet. Der  $x$ - und der  $y$ -Gradient entsprechen dabei dem einfachen trapezförmigen Gradientenpuls. Zur Darstellung dieser Pulsform wurden die ersten fünf Harmonischen verwendet, was die Pulsform sehr gut wiedergab (vgl. mit Abbildung 7.2). Der  $z$ -Gradient besitzt die Form des doppelten Gradientenpulses. Zur Darstellung des  $z$ -Gradienten wurden die ersten elf Harmonischen berücksichtigt.

Die Zeitparameter, Gradientenstärken sowie die dazu notwendigen Stromstärken sind in Tabelle 7.1 aufgeführt. Die Gewichtsfaktoren  $g_i$  für die einzelnen Harmonischen der Reihenentwicklung sind in Tabelle 7.2 angegeben. Diese Faktoren geben den prozentualen Anteil jeder berücksichtigten Harmonischen in der gesamten Reihenentwicklung an. Der Gewichtsfaktor  $g_i$  der  $i$ -ten Harmonischen ergibt sich folgendermaßen aus den Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ :

$$g_i = \frac{a_i + b_i}{|a_0| + \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)} . \quad (7.13)$$

Je nach Symmetrie der betrachteten Gradientenpulsform können bei dieser Gleichung auch Terme  $a_i$  oder  $b_i$  wegfallen.

Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die Koeffizienten einer Harmonischen durch die Betragssumme aller berücksichtigten Fourierkoeffizienten geteilt werden müssen. So ergeben sich auch negative Gewichtsfaktoren. Letzten Endes bedeutet ein negativer Gewichtsfaktor bei der Fourierreihenzerlegung lediglich eine Phasenverschiebung der jeweiligen Sinus- oder Kosinusfunktion der Harmonischen Komponente.

Der Gleichanteil  $a_0$ , der keinen Beitrag zur Stromdichte im Körper des Patienten liefert, wird in den Gewichtsfaktoren  $g_i$  in Gleichung (7.13) ebenfalls berücksichtigt. Der Gewichtsfaktor  $g_0$

Gradient		$G_x$	$G_y$	$G_z$	$G_{xyz}$
Grundfrequenz	$f_h$	55 Hz	110 Hz	111 Hz	357 Hz
1. harmonische	$1 \cdot f_h$	23,6 %	29,8 %	17,6 %	39,4 %
2. harmonische	$2 \cdot f_h$	-10,7 %	19,4 %	25,8 %	-
3. harmonische	$3 \cdot f_h$	-1,4 %	7,0 %	22,0 %	-6,3 %
4. harmonische	$4 \cdot f_h$	6,3 %	-2,9 %	11,3 %	- %
5. harmonische	$5 \cdot f_h$	-3,8 %	-7,8 %	2,3 %	-0,6 %
6. harmonische	$6 \cdot f_h$	-	-	0,0 %	-
7. harmonische	$7 \cdot f_h$	-	-	3,3 %	1,3 %
8. harmonische	$8 \cdot f_h$	-	-	6,9 %	-
9. harmonische	$9 \cdot f_h$	-	-	6,9 %	-
10. harmonische	$10 \cdot f_h$	-	-	3,6 %	-
11. harmonische	$11 \cdot f_h$	-	-	0,4 %	-
Gleichanteil		54,2 %	33,8 %	0,0 %	52,5 %

**Tabelle 7.2:** Gewichtsfaktoren für die Grundfrequenz und die einzelnen Harmonischen bei der Fourierreihenzerlegung der Gradientenpulsformen. Bei der Darstellung des  $G_x$ - und  $G_y$ -Gradienten wurde mit den ersten fünf Harmonischen eine sehr gute Wiedergabe der Pulsform erreicht. Bei der Darstellung des  $G_z$ -Gradienten war es notwendig die ersten elf Harmonischen zu berücksichtigen. Analog zur Arbeit von ŠIMUNIĆ ET AL. (1996A) wurden für die Darstellung des  $G_{xyz}$ -Gradienten nur die erste, dritte, fünfte und siebte Harmonische verwendet. Die Grundfrequenz wird durch die jeweilige Pulsdauer  $T$  bestimmt.

des Gleichanteils ergibt sich ähnlich zu Gleichung (7.13), indem der Koeffizient  $a_0$  durch die Betragssumme aller Koeffizienten dividiert wird.

Insgesamt mussten so für den Vergleich mit der Arbeit von ŠIMUNIĆ ET AL. für alle drei Feldgradienten  $3 \cdot 5 = 15$  Einzelberechnungen durchgeführt werden und für die Berechnung der GRE-Pulsformen waren insgesamt 20 Berechnungen notwendig, je 5 für den  $x$ - und  $y$ -Gradienten und 10 für den  $z$ -Gradienten<sup>2</sup>.

## 7.4 Ergebnisse der numerischen Simulation

### 7.4.1 Auswertung der numerischen Ergebnisse

Bei der Auswertung der numerischen Ergebnisse muss analog zur Zerlegung der Pulsform in eine Fourierreihe die resultierende Stromdichte aus den Ergebnissen jeder einzelnen Berechnung rekombiniert werden. Dabei wurde zunächst bei jeder einzelnen Berechnung der Absolutbetrag der Stromdichte im Körpermodell bestimmt und im Herzmuskel der Punkt mit der maximalen Stromdichte gesucht. Die so ermittelten maximalen Stromdichten jeder einzelnen numerischen

<sup>2</sup>Für den  $z$ -Gradienten wurden insgesamt elf Harmonische berücksichtigt. Der Gewichtsfaktor für die sechste Harmonische ergab sich aber zu Null.

Berechnung befinden sich für die Vergleichsstudie mit dem einfachen trapezförmigen Gradientenpuls in Tabelle 7.3 und für die GRE-Gradientenpulse in Tabelle 7.4.

Mit Hilfe der Gewichtsfaktoren  $g_i$  kann aus den einzelnen Maximalwerten der Stromdichte eine obere Grenze für die maximal zu erwartende Stromdichte an den jeweiligen beobachteten Punkten im Körpermodell berechnet werden:

$$J_{\max, \text{abs}} = \sum_{i=1}^n (|g_i| \cdot J_{\max, i}) . \quad (7.14)$$

Bei der Berechnung des zeitlichen Verlaufs der Gesamtstromdichte müssen die Einzelergebnisse der Maximalwerte der Stromdichte gemäß ihrer Gewichtsfaktoren oder Fourierkoeffizienten gewichtet addiert werden. Dabei ist nach GRIFFITHS (2001) eine Phasenverschiebung von  $\varphi_{i/j} = \pi/4$  zu berücksichtigen, da die Wirbelströme den anregenden Gradientenfeldern nachfolgen. Dies ist auch ersichtlich aus dem Induktionsgesetz in komplexer Notation nach Gleichung (2.28). Aus der Fourierreihenentwicklung 7.5 folgt automatisch die Gleichung für die Zeitabhängigkeit der Stromdichte an den beobachteten Punkten im Körpermodell:

$$J_{\max}(t) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i \cdot J_{\max, i} \cdot \cos(i \cdot \omega \cdot t + \varphi_i)}{\sum_{k=0}^n |a_k|} \right) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{b_j \cdot J_{\max, j} \cdot \sin(j \cdot \omega \cdot t + \varphi_j)}{\sum_{l=0}^n |b_l|} \right) . \quad (7.15)$$

Je nach Symmetrie der betrachteten Gradientenpulsform können bei Gleichung (7.15) auch Terme wegfallen, da sich dann die Koeffizienten  $a_i$  oder  $b_j$  zu Null ergeben. Dies ist z. B. bei den beiden vorgestellten Gradientenpulsformen der Fall. Bei der geraden Gradientenpulsform fallen die Terme mit den Koeffizienten  $b_j$  weg und bei der ungeraden Pulsform die Terme mit den Koeffizienten  $a_i$ . Die einzelnen Ergebnisse für  $J_{\max}$  aus Tabelle 7.3 oder 7.4 müssen dann den entsprechenden Summentermen zugeordnet werden.

Die mit Gleichung (7.14) berechnete Obergrenze kann in einigen Fällen den tatsächlich maximal auftretenden Wert der Stromdichte deutlich überschätzen, da bei der Rekombination des zeitlichen Verlaufs der Stromdichte nach Gleichung (7.15) bei Funktionen mit nicht verschwindenden Koeffizienten  $a_n$  durch die Phasenverschiebung  $\varphi_i = \pi/4$  die Kosinusterme in der Reihenentwicklung zu Sinusfunktionen umgewandelt werden und damit die Funktionsmaxima der einzelnen harmonischen Terme nicht mehr auf gleiche Zeitpunkte fallen. Dadurch ist eine einfache gewichtete Addition nach Gleichung (7.14) der Einzelmaximalwerte zur Bestimmung der Maximalamplitude nicht möglich.

Im Falle einer ungeraden Funktion verschwinden alle Fourierkoeffizienten bis auf die  $b_n$ . Gleichung (7.15) wird bei Berücksichtigung der Phasenverschiebung  $\varphi_j = \pi/4$  zu einer reinen Kosinusreihe, deren einzelne Maxima der harmonischen Terme zusammenfallen. Aber auch in diesem Fall kann Gleichung (7.14) die tatsächliche Maximalamplitude überschätzen, genau dann wenn einige Koeffizienten  $b_n$  negativ sind. Es empfiehlt sich daher in jedem Fall Gleichung (7.15) auszuwerten und daraus die tatsächlichen Funktionsmaxima zu bestimmen.

#### 7.4.2 Maximale Stromdichte im Körpermodell

Aus den Werten in Tabelle 7.3 und 7.4 können mit Hilfe von Gleichung (7.14) die oberen Grenzen für die maximalen Stromdichten an den beobachteten Punkten des Körpermodells berechnet werden.

Harmonische	$G_x$	$G_y$	$G_z$	Šimunić
1.	0,129 A/m <sup>2</sup>	0,210 A/m <sup>2</sup>	0,252 A/m <sup>2</sup>	-
3.	0,408 A/m <sup>2</sup>	0,537 A/m <sup>2</sup>	0,729 A/m <sup>2</sup>	-
5.	0,694 A/m <sup>2</sup>	0,798 A/m <sup>2</sup>	1,189 A/m <sup>2</sup>	-
7.	0,986 A/m <sup>2</sup>	1,052 A/m <sup>2</sup>	2,048 A/m <sup>2</sup>	-
Maximal	0,093 A/m <sup>2</sup>	0,134 A/m <sup>2</sup>	0,178 A/m <sup>2</sup>	0,09 A/m <sup>2</sup>
Tatsächlich	0,071 A/m <sup>2</sup>	0,106 A/m <sup>2</sup>	0,137 A/m <sup>2</sup>	-

**Tabelle 7.3:** Maximalwerte des Absolutbetrages der Stromdichte im Herzmuskel bei den berechneten Harmonischen des einfachen trapezförmigen Gradientenpulses für jedes Gradientensystem zum Vergleich mit den Ergebnissen von ŠIMUNIĆ ET AL. (1996A). Die Werte für die maximale Stromdichte ergeben sich nach gewichteter Addition nach Gleichung (7.14). Die tatsächliche maximale Stromdichte ergibt sich durch Auswertung der Zeitentwicklung nach Gleichung (7.15)

Für den  $x$ -Gradienten ergab sich bei der einfachen trapezförmigen Pulsform eine Maximalamplitude von 0,093 A/m<sup>2</sup>, für den  $y$ -Gradienten von 0,134 A/m<sup>2</sup> und für den  $z$ -Gradienten von 0,178 A/m<sup>2</sup>.

Für den  $x$ -Gradienten der GRE-Gradientensequenz ergaben sich Maximalamplituden der Stromdichte im Herzmuskel von 0,015 A/m<sup>2</sup>, für den  $y$ -Gradienten von 0,022 A/m<sup>2</sup> und für den  $z$ -Gradienten von 0,278 A/m<sup>2</sup>.

Für den  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Gradienten ergaben sich durch Auswertung der Zeitentwicklung bei der einfachen trapezförmigen Pulsform tatsächliche Maximalamplituden von 0,071 A/m<sup>2</sup>, 0,106 A/m<sup>2</sup> und 0,137 A/m<sup>2</sup>.

Für den  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Gradienten der GRE-Gradientensequenz ergaben sich tatsächliche Maximalamplituden von 0,013 A/m<sup>2</sup>, sowie von 0,018 A/m<sup>2</sup> und von 0,278 A/m<sup>2</sup>.

Wie erwartet werden die tatsächlichen Maximalamplituden durch die gewichtete Addition nach Gleichung (7.14) im Fall des einfachen trapezförmigen Gradientenpulses um bis zu 31 % überschätzt. Beim ungeraden  $z$ -Gradientenpuls der GRE-Sequenz ergaben sich keine Abweichungen zwischen den Werten der gewichteten Addition und der Auswertung der Zeitentwicklung der Stromdichte.

Abbildung 7.6a zeigt den Absolutbetrag der Stromdichte für den einfachen  $x$ -Gradienten. Dazu wurden für die einzelnen Harmonischen der Rekonstruktionsfunktion (7.15) die Werte aus Tabelle 7.3 verwendet. Es zeigt sich, dass die Stromdichte genau dann ihre maximalen Werte einnimmt, wenn der Feldgradient ansteigt oder abfällt, d. h. sich der Fluss der magnetischen Induktion durch den Körper ändert.

Abbildung 7.6b zeigt den Absolutbetrag der Stromdichte für den doppelten  $z$ -Gradienten der GRE-Gradientensequenz. Auch hier zeigt sich, dass die Stromdichte genau dann ihre maximalen Werte einnimmt, wenn der Feldgradient ansteigt oder abfällt. Das Maximum der induzierten Stromdichte wird während des steilsten Anstiegs oder Abfalls, d. h. zum Zeitpunkt der größten Änderung des Feldgradienten erreicht.

Ein Vergleich der erreichten Maximalwerte beider induzierter Stromdichten in Abbildung 7.6 zeigt, dass sich bei der doppelten Gradientenpulsform eine ungefähr viermal so große maxima-

Gradient	Harm.	$J_{\max, H}$ in A/m <sup>2</sup>	Gradient	Harm.	$J_{\max, H}$ in A/m <sup>2</sup>
$G_x$	1.	0,017	$G_z$	1.	0,069
$G_x$	2.	0,033	$G_z$	2.	0,144
$G_x$	3.	0,048	$G_z$	3.	0,219
$G_x$	4.	0,063	$G_z$	4.	0,296
$G_x$	5.	0,080	$G_z$	5.	0,371
$G_y$	1.	0,076	$G_z$	7.	0,538
$G_y$	2.	0,151	$G_z$	8.	0,615
$G_y$	3.	0,224	$G_z$	9.	0,692
$G_y$	4.	0,298	$G_z$	10.	0,773
$G_y$	5.	0,372	$G_z$	11.	0,858
$G_x$	Max.	0,015	$G_z$	Max.	0,278
$G_y$	Max.	0,022			
$G_x$	Tat.	0,013	$G_z$	Tat.	0,278
$G_y$	Tat.	0,018			

**Tabelle 7.4:** Maximalwerte des Absolutbetrages der Stromdichte im Herzmuskel ( $J_{\max, H}$ ) bei den berechneten Harmonischen der Gradientenpulse der klinischen Gradientenecho Sequenz. Die Maximalwerte nehmen mit steigender Harmonischer und damit steigender Frequenz zu. Die Werte für die maximale Stromdichte ergeben sich nach gewichteter Addition nach Gleichung (7.14). Die tatsächliche maximale Stromdichte ergibt sich durch Auswertung der Zeitentwicklung nach Gleichung (7.15).

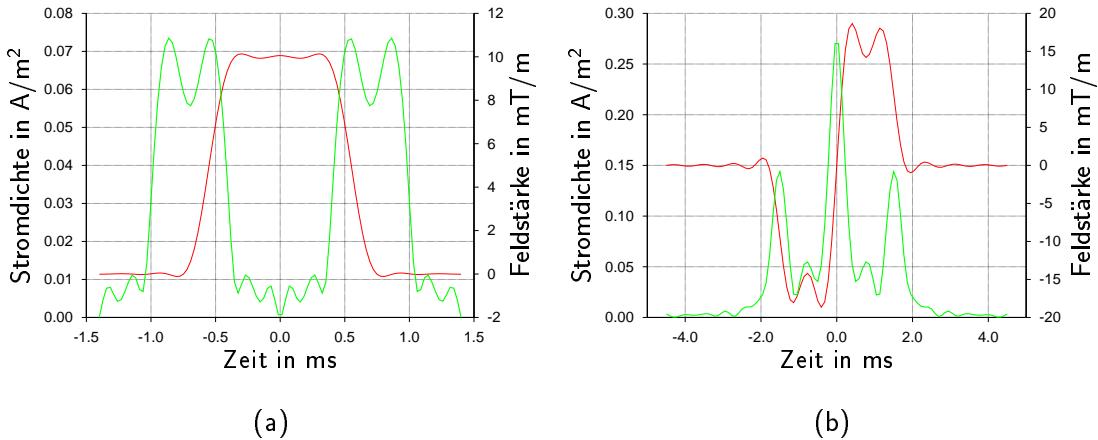
le Stromdichte als bei der trapezförmigen Gradientenpulsform ergibt. Dies korreliert mit den unterschiedlichen Steilheiten der Gradientenrampen, die sich um den Faktor 4,8 voneinander unterscheiden (vgl. Abschnitt 7.2.2).

Abbildung 7.7 zeigt die tatsächliche Maximalamplitude der Stromdichte in einem frontalen Schnitt durch das Oberkörpermodell die durch den  $z$ -Gradienten der GRE-Gradientensequenz induziert wird.

### 7.4.3 Diskussion der numerischen Ergebnisse

Die numerischen Ergebnisse haben gezeigt, dass es mit Hilfe einer Fourierreihenentwicklung möglich ist, beliebige Gradientenpulsformen zu zerlegen und die einzelnen Komponenten dann im Frequenzbereich zu berechnen, um sie danach wieder zu rekombinieren. So kann der zeitliche Verlauf der Stromdichte während eines Gradientenpulses dargestellt werden.

Die vorgestellte numerische Methode ist ein gangbarer Weg, der allerdings mit einem hohen Zeit- und Rechenaufwand verbunden ist, da unter Umständen eine Vielzahl einzelner Rechnungen durchgeführt und danach miteinander kombiniert werden müssen. Bei einer Einschränkung der berücksichtigten Harmonischen lässt sich hier Zeit sparen. Aber nicht alle Gradientenpulsformen lassen sich zufriedenstellend mit einigen wenigen Harmonischen rekonstruieren, wie der einfache trapezförmige Gradient. Insbesondere bei der doppelten Gradientenpulsform zeigte sich, dass



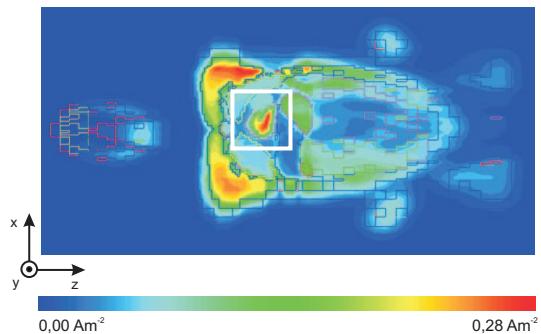
**Abbildung 7.6:** Rekonstruktion des zeitlichen Verlaufes des Absolutbetrages der Stromdichte (grüne Linien) im Herzmuskel des x-Gradienten der einfachen Rampenfunktion (a) und des doppelten z-Gradienten der GRE-Gradientenpulssequenz (b). Die tatsächliche maximale Stromdichte im Herzmuskel ergab sich zu  $0,071 \text{ A/m}^2$  beim einfachen trapezförmigen Gradientenpuls und zu  $0,278 \text{ A/m}^2$  bei der doppelten Pulsform. Die Stromdichte im Muskelgewebe erreicht während den An- und Abstiegszeiten der Gradienten ihre Maximalwerte. Ist die Stärke des Gradientenfeldes konstant, werden keine Ströme induziert. Die Stromdichte ergibt sich dann näherungsweise zu Null. Zum besseren Vergleich wurden die jeweiligen Gradientenformen mit in die Diagramme aufgenommen (dünne rote Linien).

auch die Berücksichtigung höherer Ordnungen notwendig war, um die Pulsform wiedergeben zu können. Die Auswahl von Harmonischen stellt sich mit als die schwierigste Aufgabe dar und dafür kann auch keine allgemeingültige Regel angegeben werden.

Ein Vergleich der hier berechneten Werte des einfachen Gradientenpulses mit den Ergebnissen von ŠIMUNIĆ ET AL. (1996A) bestätigt die Größenordnung des dort berichteten Maximalwertes von  $0,09 \text{ A/m}^2$  der Stromdichte, die dort im schlimmsten Fall vom z-Gradienten im Herzen des Körpermodells induziert wurde. In Übereinstimmung mit der Arbeit von ŠIMUNIĆ ET AL. ergab auch bei dieser Untersuchung stets der z-Gradient die höchsten Stromdichten im Herzmuskel aufgrund der gewählten Positionierung des Herzens im Zentrum einer z-Gradientenspule. Der tatsächliche Maximalwert von  $0,137 \text{ A/m}^2$  liegt zwar etwas über dem von ŠIMUNIĆ ET AL. berichteten Maximalwert, was aber an Unterschieden bei der numerischen Modellierung oder den verwendeten Körpermodellen liegen kann.

Die berechneten Stromdichten liegen hier in jedem Fall über den von der ICNIRP (1998) zugelassenen maximalen Stromdichten von  $10 \text{ mA/m}^2$  für beruflich exponierte Personen. Da nach ICNIRP ab einer Stromdichte von  $100 \text{ mA/m}^2$  mit einer Stimulation von Muskel- und Nervengewebe gerechnet werden muss, könnte es in den hier diskutierten Fällen zu einer Stimulation kommen, da einige berechnete Werte die Stimulationsschwelle übersteigen. Insbesondere die durch den doppelten z-Gradienten erzeugte Stromdichte im Herzmuskel ist als kritisch zu betrachten und erfordert daher weitergehende Untersuchungen. Es gilt die Frage zu klären, ob die hohe Stromdichte im numerischen Modell durch die Struktur des einfachen Golay-Gradientensystems bedingt ist und bei realitätsgtreuer Modellierung einer z-Gradientenspule verschwindet.

**Abbildung 7.7:** Maximale Stromdichte im Herzmuskel des Oberkörpermodells. Beim Schalten des z-Gradienten erreicht die Stromdichte im Herzen (weißer Kasten) einen Maximalwert von  $0,278 \text{ A/m}^2$ . Im Kopfbereich im Zentrum des kompletten Gradientenspulensystems werden deutlich geringere Stromdichten beobachtet.



## 7.5 Wissenschaftlicher Beitrag der Arbeit

In diesem Kapitel wurde die Entstehung von Wirbelströmen im menschlichen Körper durch die Gradientenfelder der Magnetresonanztomographie numerisch untersucht. Es wurde gezeigt, wie einfache und komplexe Gradientenpulsformen durch eine Fourierreihenentwicklung zerlegt werden können, um das numerische Problem im Frequenzbereich zu lösen, da eine Berechnung im Zeitbereich durch das restriktive Stabilitätskriterium und der daraus folgenden hohen Anzahl an Rechenschritten nicht möglich war.

Darüber hinaus wurde gezeigt, wie die numerischen Rechenergebnisse wiederum in eine Reihe entwickelt werden müssen, um den zeitlichen Verlauf der induzierten Stromdichte berechnen zu können. Anhand zweier Beispielszenarien wurden zwei Gradientenpulssequenzen exemplarisch mit einem hochauflösten Oberkörpermodell berechnet. Die erste Gradientensequenz wurde in Anlehnung an die Studie von ŠIMUNIĆ ET AL. (1996A) gewählt, um einen Vergleich der eigenen Ergebnisse mit einer bekannten Studie zu ermöglichen und so die numerische Vorgehensweise zu validieren. Es zeigte sich, dass die Aussagen und die von ŠIMUNIĆ ET AL. angegebenen Größenordnungen der induzierten Stromdichte bestätigt werden konnten.

In einer weiteren numerischen Untersuchung wurde eine GRE-Gradientensequenz mit einer doppelten Gradientenpulsform untersucht, die eine aufwändigeren Fourierreihenentwicklung notwendig machte. Es zeigte sich, dass je steiler die Rampe eines Gradientenpulses ist desto größer ist die induzierte Stromdichte. Zwischen Gradientensteinheit und maximaler Stromdichte im Körper konnte in dieser Arbeit ein fast linearer Zusammenhang nachgewiesen werden. In Kombination mit einer Positionierung des Herzmuskels im Zentrum einer Gradientenspule konnte die doppelte trapezförmige Gradientenpulsform im untersuchten Fall Stromdichten im Herzmuskel induzieren, bei der unerwünschte Stimulationen von Muskel- und Nervengewebe möglich sind.

Mit dieser Arbeit steht nun eine Möglichkeit zur numerischen Abschätzung der Risiken von Gradientenpulsformen auf den menschlichen Körper zur Verfügung. Aufgrund der erhaltenen Ergebnisse sind weitere numerische Betrachtungen notwendig, um die möglichen Risiken für Patienten im Falle von Rampensteinheiten in der Größenordnung von  $160 \text{ mT}/(\text{m} \cdot \text{ms})$  weitergehend zu untersuchen.

---

## Kapitel 8

# Optimierung von Neutralelektroden in der Elektrochirurgie

---

### 8.1 Einführung

#### 8.1.1 Historischer Überblick

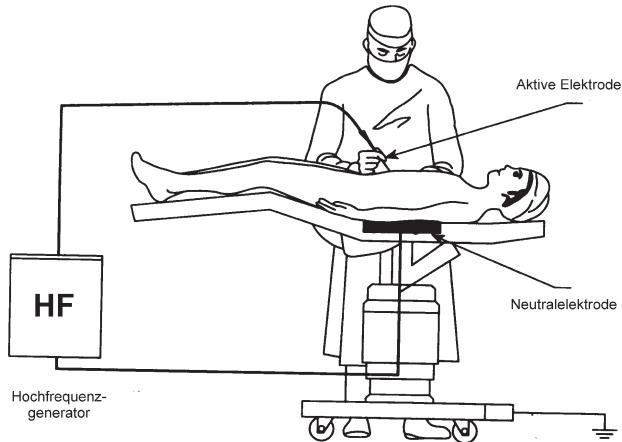
Die monopolare Elektrochirurgie ist heutzutage als modernes Werkzeug im Operationssaal nicht mehr wegzudenken. Aufgrund der hohen Temperaturen an der aktiven Elektrode werden Gefäße durch den Hochfrequenzstrom direkt während des Schneideprozesses verschlossen. Dieses Verfahren ist im allgemeinen schonender für den Patienten, da geringere Blutverluste auftreten, als bei herkömmlichen Operationsmethoden. Als Gegenpol zum Operationswerkzeug muss eine großflächige Neutralelektrode auf den Körper des Patienten geklebt werden, damit der Strom vom Operationswerkzeug zum Hochfrequenzgenerator zurückfließen kann.

Trotz der notwendigerweise großen Flächen dieser Neutralelektroden treten immer wieder unbeabsichtigte thermische Verletzungen der Haut, insbesondere am Rand dieser Elektroden, auf. In der Literatur finden sich zahlreiche Berichte über Verbrennungen infolge von elektrochirurgischen Eingriffen (BATTIG, 1968; MASAKO & ICHIYNAGI, 1973; SCHELLHAMMER, 1974).

In den Anfängen der Elektrochirurgie wurde der Strom des Hochfrequenzgenerators einfach über den Operationstisch von der monopolaren Koagulationselektrode gegen Erde geleitet. Diese unkontrollierte Stromrückführung führte insbesondere an den Auflagestellen des Patientenkörpers auf dem Operationstisch zu Verbrennungen (GEDDES & BAKER, 1989).

Verbesserungen dieser Problematik brachten schließlich Neutralelektroden, die den Strom kontrolliert über eine große Metallfläche, die auf Bauch oder Rücken des Patienten platziert wurde, zum Hochfrequenzgenerator zurückführt und damit über eine vorgegebene Fläche eine risikoarme Stromdichte zu gewährleisten. Allerdings traten auch hier lokale Verbrennungen auf, die auf den unterschiedlichen elektrischen Kontakt mit der Haut zurückzuführen waren. Die Elektroden wurden daraufhin mit einem leitfähigen Gel beschichtet, welches den Übergangswiderstand zwischen Metall und Haut verringerte und zudem für einen gleichmäßigen elektrischen Kontakt sorgte. Studien wie z.B. von PEARCE ET AL. (1979), die Elektroden mit und ohne Leitgel miteinander verglichen, zeigten deutliche Unterschiede zugunsten der Elektroden mit Leitgel, die

**Abbildung 8.1:** Ursprüngliche Anwendung der monopolaren Elektrochirurgie in der klinischen Praxis. Der Patient ist über den Operationstisch mit dem Hochfrequenzgenerator verbunden. Durch die ungleiche Auflagefläche des Patientenkörpers kam es immer wieder zu schweren Verbrennungen (GEDDES, 1995).



sich in Form von homogeneren Temperaturverteilungen auf der Haut und insgesamt kleineren Maximaltemperaturen zeigten.

Entscheidend für Testverfahren von verschiedenen Elektrodentypen war die Entwicklung und Anwendung geeigneter Messverfahren für die Temperaturverteilung auf der Hautoberfläche vor, während und nach dem Stromfluss durch die Neutralelektrode. Im Laufe der Jahre kamen Messverfahren wie die Mikrowellenthermographie oder die Infrarotthermographie zum Einsatz (EDRICH & COOKSON, 1987). Moderne Verfahren nutzen heutzutage zweidimensionale Arrays mit Thermoelementen, die direkt auf die zu untersuchende Neutralelektrode geklebt werden und so während des Stromflusses eine Aufzeichnung der Temperaturen auf der Elektrodenoberfläche ermöglichen (NESSLER, 1999).

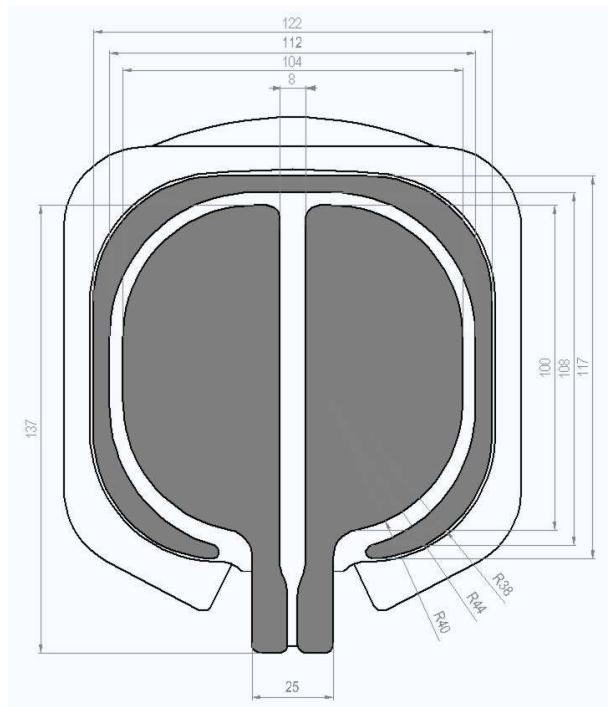
Neben dem Risiko von Verbrennungen der Haut durch Erwärmung unter einer Neutralelektrode bestehen bei der Elektrochirurgie auch Risiken für Träger mit aktiven Implantaten, z. B. ähnlich zu dem bereits vorgestellten Szenarium eines Patienten mit Herzschrittmacher im MR-Tomographen in Abschnitt 6.3.2. Diese sollen aber nicht in diesem Kapitel diskutiert werden. Stattdessen wird hier auf die entsprechenden Studien von SCHICK ET AL. (2001) und SCHICK UND LANDSTORFER (2003) verwiesen.

### 8.1.2 Entwicklung neuer Neutralelektrodendesigns

Trotz der verbesserten elektrischen Eigenschaften der Neutralelektroden blieben Verbrennungen insbesondere an den Rändern von Neutralelektroden nicht aus. In weiteren Arbeiten erkannten OVERMYER ET AL. (1979), dass diese Erscheinungen durch eine Konzentration der Stromdichte an den Außenbereichen der Neutralelektroden verursacht wurden. Dies wurde auch von GEDDES UND BAKER (1989) berichtet. Bereits im Jahre 1982 führten WILEY UND WEBSTER (1982) in einer theoretischen Arbeit den Nachweis und zeigten an einer einfachen kreisrunden Neutralelektrondengeometrie, dass der Innenbereich von Neutralelektroden nur einen geringen Beitrag zur Gesamtstromaufnahme leistet und schlugen schon damals vor, die Neutralelektroden mit kreisrunden Elektrodenringen zu umgeben, die sich auf das Erwärmungsverhalten günstig auswirken sollten. Trotz dieser wichtigen Arbeit fand sich bis vor kurzem keine Umsetzung und Weiterentwicklung dieser Idee.

**Abbildung 8.2:** Technische Zeichnung der Neutralelektrode mit Äquipotentialring, der die beiden stromführenden halbkreisförmigen Elektroden umschliesst, aber nicht mit ihnen direkt verbunden ist. Die Zeichnung beinhaltet auch Teile der Hydrogelschicht, die unter der Aluminiumschicht (hier in dunkelgrau) als Kontaktmedium aufgetragen ist, sowie Teile der Trägerfolie aus Kunststoff, auf der die Elektrode für den Transport nach der Herstellung aufgeklebt wird.

Alle Massangaben sind in mm.

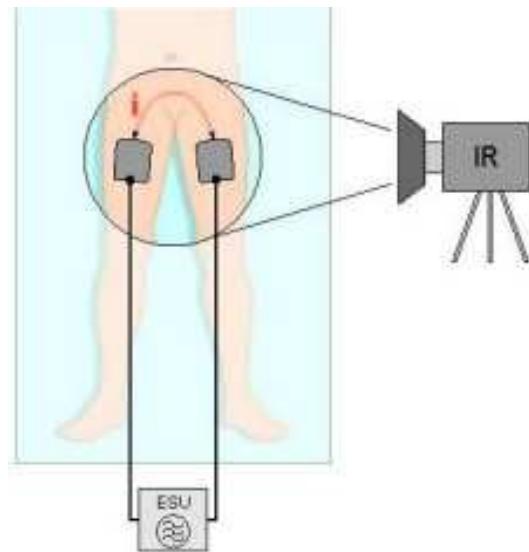


Um die Erwärmung an den Elektrodenrändern zu verbessern, wurde im Jahr 2000 von der Firma Erbe Elektromedizin in Tübingen ein Neutralektrodendesign entwickelt, welches neben der herkömmlichen stromführenden Neutralelektrode noch mit einem nicht konnektierten Außenring, dem sogenannten Äquipotentialring, umgeben ist (vgl. Abbildung 8.2). Klinische Studien zeigten, dass mit Hilfe des Äquipotentialringes bei vergleichenden Messungen eine Reduktion der Erwärmung auf der Haut der Probanden festgestellt werden konnte. Indirekt wurde dabei die Idee von WILEY UND WEBSTER aus dem Jahr 1982 aufgegriffen.

Die Neutralelektrode mit Äquipotentialring zeigte in der klinischen Studie homogenere Wärmeverteilungen auf der Haut und eine niedrigere Maximaltemperatur als Vergleichselektroden ohne Ring. Klinische Studien lassen zwar grobe Tendenzen bezüglich physiologischer und anatomischer Parameter und der zu erwartenden Maximaltemperatur der Hautoberfläche erkennen, aber dennoch sind auch die Aussagen in der Literatur diesbezüglich sehr vage, da eine abgeschlossene theoretische Beschreibung bislang fehlt (NESSLER, 1996; EDRICH & COOKSON, 1987; GEDDES, 1995). In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, wie mit Hilfe der numerischen Feldrechnung diese Lücke geschlossen werden kann.

Da sich dieses neue Design in experimentellen Untersuchungen als sehr vorteilhaft erwiesen hat, ergaben sich aus den klinischen Ergebnissen neue Fragestellungen. Dazu gehörten unter anderem Fragen nach der Abhängigkeit der Erwärmung von physiologischen Parametern der Probanden und von der eigentlichen Form der Neutralelektrode, sowie Fragen nach der zeitlichen Entwicklung der Erwärmung. Mögliche Antworten lassen sich mit Hilfe der numerischen Feldtheorie gewinnen, da mit diesem Verfahren gezielt die Auswirkung der Variation einzelner Parameter durch vergleichende numerische Rechnungen reproduzierbar ermittelt werden kann. Im Experiment ist die gezielte Variation einzelner physiologischer Parameter in der Regel sehr schwierig, daher können hier mit Hilfe der numerischen Feldrechnung Erkenntnisse erlangt werden, die zu einer weiteren Verbesserung der Patientensicherheit bei der Elektrochirurgie führen.

**Abbildung 8.3:** Experimentelles Vorgehen beim Test einer neuen Neutralelektrode. Die Elektrode wird auf beide Oberschenkel eines Probanden aufgeklebt. Danach fliesst ein Teststrom über den Probanden. Mit Hilfe einer Infrarot-Wärmebildkamera wird die Erwärmung auf der Hautoberfläche aufgezeichnet. Die Elektrode erhält dann ihre Marktzulassung, wenn bei keinem der vorgeschriebenen Probanden eine unzulässig große Erwärmung über 6 K auftritt.

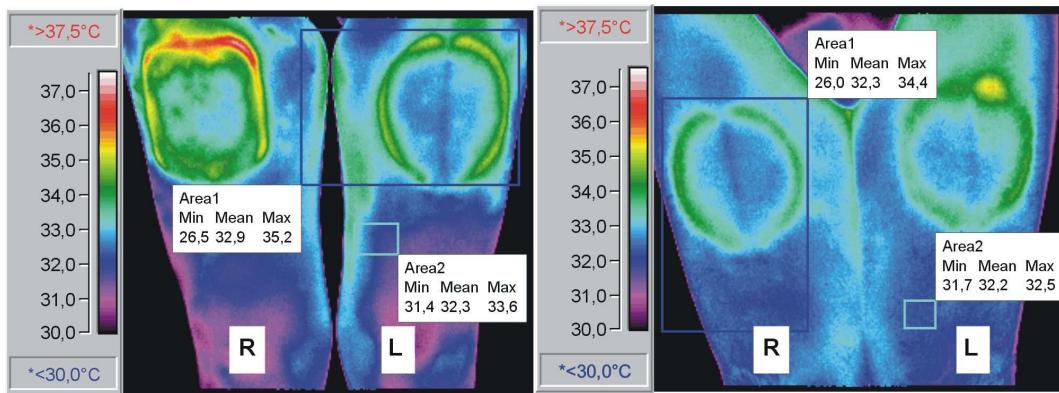


### 8.1.3 Teststandards für Neutralelektroden

Bevor eine Neutralelektrode eine Marktzulassung erhält, muss sie in verschiedenen experimentellen Verfahren getestet werden. Diese Verfahren werden durch die AAMI HF-18-Norm einheitlich geregelt und festgelegt (AAMI, 2001). Die Testverfahren überprüfen die Sicherheit einer Neutralelektrode und sollen somit ausschliessen, dass es bei Anwendung einer Neutralelektrode zu Verbrennungen des Patienten kommen kann.

Der § 4.2.3.1 der AAMI Norm schreibt vor, dass eine Neutralelektrode bei mindestens fünf weiblichen und fünf männlichen Probanden getestet werden muss. Bevor der Test durchgeführt werden kann, muss sich jeder Proband bereits mindestens eine halbe Stunde im Untersuchungsraum aufhalten und ausruhen, um so über eine konstante Durchblutung der Extremitäten zu verfügen und mit der Umgebung thermodynamisch im Gleichgewicht zu sein. Unmittelbar vor der Applikation der beiden Neutralelektroden auf den Oberschenkeln wird die Oberflächentemperatur der Haut mit Hilfe einer Infrarot-Wärmebildkamera gemessen. Danach werden die Neutralelektroden, die getestet werden sollen, auf beide Unterschenkel des Probanden aufgeklebt, wie in Abbildung 8.3 zu sehen ist. Dann fliesst bei erwachsenen Probanden für eine Dauer von 60 s ein sinusförmiger Teststrom mit einem Mittelwert von 700 mA ( $\pm 10\%$ ) über die Elektroden durch den Körper. Bei Kindern wird der Teststrom auf einen Mittelwert von 500 mA ( $\pm 10\%$ ) reduziert. Unmittelbar nach dem Stromfluss werden die Elektroden abgezogen und mit Hilfe der Infrarot-Wärmebildkamera die resultierende Erwärmung auf der Hautoberfläche gemessen (vgl. Abbildung 8.4).

In § 4.2.8.2.3 der AAMI Norm wird ein weiteres Testverfahren beschrieben, welches einen Test des Sicherheitssystems des Hochfrequenzgenerators darstellt, das die Impedanz zwischen den beiden Elektrodenhälften überwacht. Da diese Impedanz ein Mass für den Kontakt der Elektrodenklebefläche mit der Haut darstellt, muss das Sicherheitssystem des Hochfrequenzgenerators ein Alarmsignal abgeben, sobald die Impedanz unter einen Grenzwert fällt. Dies ist gleichbedeutend mit einer Verschlechterung des elektrischen Kontakts zwischen Neutralelektrode und Patient. Man geht in diesem Fall davon aus, dass sich die Elektrode während des Betriebs vom Patienten lösen und sich dadurch die aktive stromführende Kontaktfläche so weit verringern



**Abbildung 8.4:** Aufnahmen der Wärmebildkamera der Hautoberfläche von zwei Probanden bei Erwärmungstest gemäß der AAMI HF-18-Norm. Auf der linken Aufnahme ist die Temperaturverteilung einer Elektrode mit Äquipotentialring und einer Elektrode ohne Äquipotentialring zu sehen. Das Ergebnis zeigt, dass Elektroden mit Äquipotentialring bezüglich der maximalen beobachteten Erwärmung, sowie der symmetrischeren Form des Erwärmungsmusters vorteilhafter sind. Bei der Aufnahme auf der rechten Seite konnte am Rand der Neutralelektrode auf dem linken Oberschenkel eine lokale „heiße“ Stelle beobachtet werden, die wahrscheinlich durch ein oberflächliches Blutgefäß verursacht wurde.

kann, dass es durch die dadurch resultierende höhere Stromdichte an der kleineren Kontaktfläche zu Verbrennungen des Patienten kommen kann.

Mit diesem Test soll sichergestellt werden, dass das Sicherheitssystem des Elektrochirurgiegerätes zuverlässig arbeitet, so dass bei Kontaktproblemen ein Alarm ausgelöst wird, bevor es zu Verbrennungen der Haut der Probanden kommen kann. Dieses Testverfahren sieht vor, dass die Elektroden zunächst auf den Oberschenkeln des Probanden fixiert werden. Danach werden die Elektroden bei angeschlossenem Hochfrequenzgenerator langsam wieder von den Oberschenkeln abgezogen, bis das Alarmsystem des Elektrochirurgiegerätes anspricht. Dann fließt wiederum ein Teststrom von 700 mA ( $\pm 10\%$ ) für 60 s durch den Probanden. Auch hier erfolgt unmittelbar nach dem Stromfluss eine Messung der Hauttemperatur mittels Wärmebildkamera.

Damit eine Elektrode ihre Marktzulassung erhält, dürfen bei beiden beschriebenen Testverfahren bei keinem Probanden an keiner Stelle auf der Hautoberfläche absolute Erwärmungen über 6 K beobachtet werden. Die beiden Testverfahren scheinen auf dem ersten Blick sehr ähnlich zueinander zu sein. Allerdings stellt das Verfahren nach § 4.2.8.2.3 die höheren Anforderungen an die Neutralelektrode, da hier die Kontaktfläche zwischen Elektrode und Proband geringer ist und damit bei gleicher Stromstärke höhere Stromdichten erzielt werden.

#### 8.1.4 Inhalt der weiteren Unterkapitel

In den folgenden Abschnitten werden zunächst die experimentellen Ergebnisse der klinischen Studie von Neutralelektroden mit Äquipotentialringen wiedergegeben. Danach wird das numerische Oberschenkelmodell und die numerischen Berechnungen vorgestellt, gefolgt von einer Diskussion und Bewertung der Ergebnisse. Im Anschluss daran wird in einem eigenen Abschnitt auf die

besondere Problematik bei der elektrochirurgischen Behandlung von Kindern eingegangen und ein numerisches Modell zur Bestimmung der zulässigen Grenzelektrodenfläche beschrieben.

Die numerischen Ergebnisse bei der Bestimmung der zulässigen minimalen Elektrodenfläche werden in einem weiteren Abschnitt um eine theoretische Betrachtung ausgehend von den Vorarbeiten von WILEY UND WEBSTER (1982) ergänzt, bei der ein Zusammenhang zwischen Elektrodengröße und erwarteter Erwärmung der Hautoberfläche abgeleitet wird. Diese Abschätzung wird mit den berechneten numerischen Ergebnissen verglichen. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse und Erkenntnisse aus dieser Forschungsarbeit schließt dieses Kapitel ab.

## 8.2 Neutralelektroden mit einem Äquipotentialring

### 8.2.1 Ergebnisse der klinischen Studie

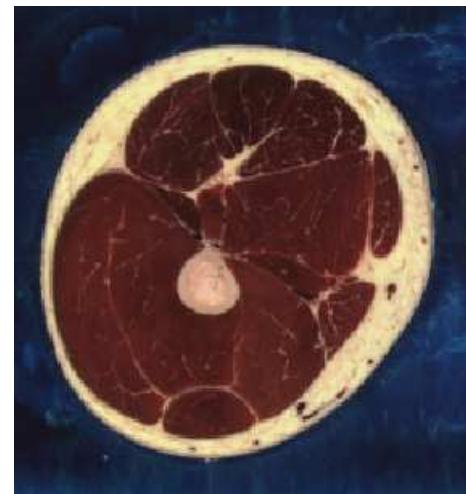
In einer klinischen Studie wurden Testmessungen nach § 4.2.3.1 der AAMI Norm an 30 männlichen und weiblichen Probanden durchgeführt (vgl. Abschnitt 8.1.3). Der Messaufbau wird in Abbildung 8.3 wiedergegeben. Gemäß der vorgeschriebenen Testprozedur wurde vor und nach der Stromflussdauer von 60 s eine Thermographiemessung mit der Wärmebildkamera durchgeführt.

Abbildung 8.4 gibt zwei Messergebnisse wieder. Im linken Teil der Abbildung wird der Effekt des Äquipotentialrings im direkten Vergleich zwischen einer Elektrode ohne und einer mit Ring gezeigt. Die Elektrode ohne Äquipotentialring zeigt ein sehr unregelmäßiges Erwärmungsmuster und eine Maximaltemperatur von 37,5 °C nach einer Stromflussdauer von 60 s im Vergleich zu einer Maximaltemperatur von 35,2 °C bei der Elektrode mit Äquipotentialring. Die Ausgangstemperatur der Hautoberfläche lag in diesem Fall bei 33,0 °C vor dem Stromfluss. Im rechten Teil der Abbildung ist die Bildung einer heißen Stelle („Hot-Spot“) am Rand der Neutralelektrode zu erkennen. Frühere experimentelle Arbeiten zu diesem Thema berichten ebenfalls über die Entstehung von Hot-Spots und verbinden die Entstehung lokaler heißer Punkte mit oberflächlichen Blutgefäßen (EDRICH & COOKSON, 1987). Diese Beobachtung und der Hinweis aus der Literatur wurde aufgegriffen und in die darauf folgende numerische Studie mit einbezogen.

Bei allen 30 Probanden wurde die maximale Hauttemperatur vor und nach dem Stromfluss bestimmt. Der Durchschnittswert vor dem Stromfluss lag bei 31,9 °C und nach dem Stromfluss wurde eine durchschnittliche maximale Hauttemperatur von 34,8 °C beobachtet. Entscheidend für die Bewertung der Ergebnisse nach der AAMI Norm § 4.2.3.1 ist aber die absolute maximale Temperaturerhöhung. Dafür ergab sich ein Mittelwert von 3,4 K bei Berücksichtigung aller 30 Probanden. Als Maximalwert wurde eine absolute Erhöhung von 4,5 K bei einem Probanden beobachtet (GOLOMBEC ET AL., 2003).

Nach den Testmessungen an 30 Probanden nach § 4.2.3.1 der AAMI Norm wurden an über 150 Probanden Messungen nach § 4.2.8.2.3 der AAMI Norm durchgeführt (vgl. Abschnitt 8.1.3). Auch bei diesen Tests des Sicherheitssystems des Hochfrequenzgerätes wurden keine absoluten Erwärmungen über 6,0 K beobachtet. Da in allen Testfällen die AAMI Norm strikt eingehalten wurde, konnte die Elektrode für den Markt zugelassen werden.

**Abbildung 8.5:** Schnitt durch den Oberschenkel des Visible Man Datensatzes nach SACHSE ET AL. (2000B). Anhand des anatomischen Aufbaus des Oberschenkels wurden die Dimensionen für das numerische Modell gewählt. Dabei wurde bis auf den Knochen eine Haut-, Fett- und Muskelschicht, sowie ein Blutgefäß modelliert.

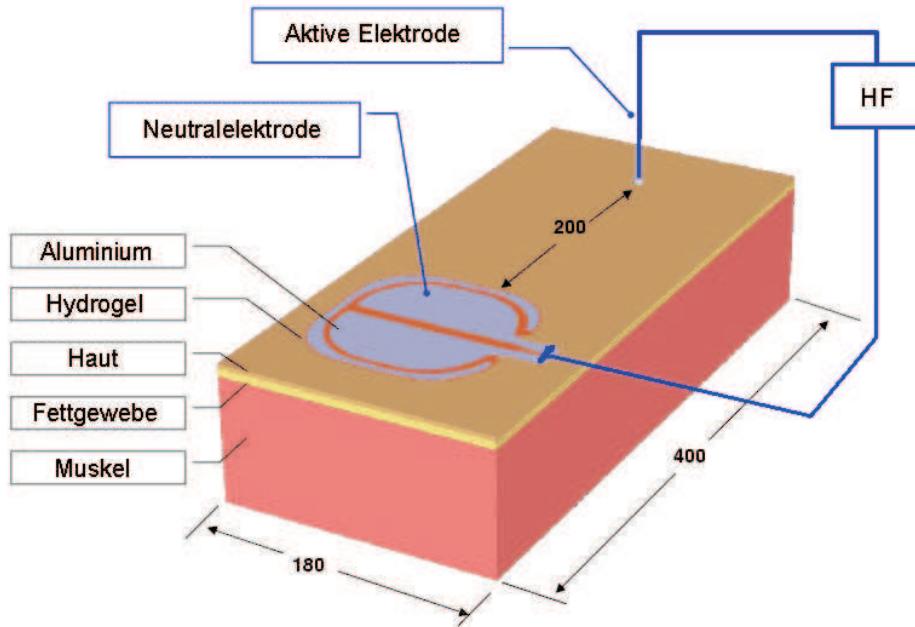


### 8.2.2 Erstellung der Oberschenkelschichtmodelle

Die numerischen Untersuchungen wurden an einem quaderförmigen Gewebeblock durchgeführt, der aus einer Muskel-, Fett- und Hautschicht aufgebaut ist. Der Block hat eine Breite von 180 mm, eine Länge von 400 mm und eine variable Höhe zwischen 72 mm und 92 mm. Die Dicken der einzelnen Gewebeschichten wurden in Anlehnung an das anatomische Modell des Visible Man gewählt, wie in Abbildung 8.5 dargestellt ist (SACHSE ET AL., 2000B) und anhand verfügbarer Angaben aus Lehrbüchern der Anatomie entnommen (FRICK, 1992; GRAAF & Fox, 1994; JUNQUEIRA & CARNEIRO, 2001).

Für die Haut- und die Muskelschicht wurden anhand der Lehrbuchangaben eine feste mittlere Schichtdicke von 2 mm und 70 mm angenommen. Die Dicke der Fettschicht wurde zwischen 0 mm und 20 mm variiert, um eine Unterscheidung zwischen schlanken und beleibten Probanden zu ermöglichen. Die Dicke der Fettschicht hängt darüber hinaus auch mit dem Geschlecht der Testperson zusammen, so dass die Variation dieses Parameters besonders untersucht wurde. Als Hauttyp wurde trockene oder feuchte Haut angenommen, sowie ein Mischtyp als Mittelwert aus den dielektrischen Parametern für feuchte und für trockene Haut. Bei zwei Modellen wurde darüber hinaus ein Blutgefäß mitberücksichtigt, einmal als oberflächliches Blutgefäß unmittelbar unter der Hautoberfläche, im anderen Fall als tiefliegendes Blutgefäß in der Muskelschicht, um so den Einfluss auf das entstehende Erwärmungsmuster und das Auftreten lokaler „heißer“ Stellen zu untersuchen.

Die Elektrode selbst wurde mittels einer Aluminiumschicht von 25  $\mu\text{m}$  Dicke modelliert, die über eine 350  $\mu\text{m}$  dicke Hydrogelschicht mit der Hautoberfläche des Oberschenkelmodells verbunden wurde. Die dielektrischen Eigenschaften der Aluminiumschicht wurden einem Tabellenwerk entnommen (KUCHLING, 1991), die der Hydrogelschicht vor der Simulation in eigenen Experimenten ermittelt (GOLOMBECK ET AL., 2003). Die Geometrie der Neutralelektrode wurde nach den Vorgaben aus Abbildung 8.2 modelliert. Um den Einfluss des Äquipotentialringes auf das Erwärmungsmuster zu untersuchen, wurde dieser Ring in einigen numerischen Simulationen weggelassen, bei gleichbleibender Dimensionierung der beiden stromführenden Innenflächen der Neutralelektrode.



**Abbildung 8.6:** Numerisches Oberschenkelmodell mit Neutralelektrode und aktiver Elektrode. Die beiden Elektroden sind über einen Hochfrequenzgenerator verbunden. Das Modell besteht aus einer Haut- und Muskelschicht konstanter Dicke, sowie einer Fettschicht mit variabler Dicke. Insgesamt wurden zehn verschiedene Modelle mit unterschiedlichen physiologischen Modellparametern erstellt. Bei zwei Modellen wurde zusätzlich ein Blutgefäß eingefügt, um den Einfluss auf das resultierende Erwärmungsmuster zu untersuchen.

Um den Einfluss einer leitenden Verbindung zwischen den stromführenden Elektrodenflächen und dem Äquipotentialring zu untersuchen, wurde bei Modell 3 zusätzlich ein ohmscher Widerstand eingefügt, der in einer eigenen Reihe von numerischen Berechnungen variiert wurde.

Insgesamt wurden für diese numerische Studie zehn verschiedene numerische Modelle erstellt. Die Modelle 1 und 2 vergleichen hierbei die Wirkung des Äquipotentialringes bei trockener Hautoberfläche, indem bei Modell 1 der Äquipotentialring der Neutralelektrode hinzugefügt wurde und bei Modell 2 fehlte. Die Modelle 3 und 4 vergleichen ebenfalls die Wirkung des Äquipotentialringes. Nur wird in diesen Fällen eine feuchte Hautoberfläche angenommen. Die Auswirkung der Fettschicht auf das entstehende Erwärmungsmuster wurde in den Modellen 5 und 6 mit gemischemtem Hauttyp untersucht. Bei Modell 5 wurde mit einer Fettschicht von 20 mm eine adipöse Testperson angenommen, bei Modell 6 fehlte die Fettschicht komplett. Die Modelle 7 und 8 veranschaulichen die Unterschiede zwischen trockener und feuchter Haut bei einer Fettschicht von 20 mm. In den Modellen 9 und 10 wurde die Auswirkung einer Vene auf das entstehende Erwärmungsmuster untersucht, indem bei Modell 9 eine oberflächennahe Vene in der Fettschicht modelliert wurde und bei Modell 10 diese Vene in der tieferen Muskelschicht zu liegen kam. Eine komplette Übersicht über alle variierten Modellparameter befindet sich in Tabelle 8.1. Die für die Simulationen notwendigen dielektrischen und physikalischen Parameter finden sich in den Tabellen B.1 und B.4.

Modell	Haut in mm	Fett in mm	Muskel in mm	Hauttyp	Vene	Neutralring
1	2	12	70	Trocken	Nein	Ja
2	2	12	70	Trocken	Nein	Nein
3	2	12	70	Feucht	Nein	Ja
4	2	12	70	Feucht	Nein	Nein
5	2	20	70	Gemischt	Nein	Ja
6	2	0	70	Gemischt	Nein	Ja
7	2	20	70	Trocken	Nein	Ja
8	2	20	70	Feucht	Nein	Ja
9	2	12	70	Trocken	Hoch	Ja
10	2	12	70	Trocken	Tief	Ja

**Tabelle 8.1:** Dicke der einzelnen Gewebeschichten und weitere Modellparameter für die zehn verschiedenen Oberschenkelschichtmodell. Im einzelnen wurde die Dicke der Fettschicht, die Feuchtigkeit der Hautschicht und der Elektrodentyp variiert, sowie der Einfluss einer oberflächlichen und einer tieferliegenden Vene untersucht.

Abbildung 8.6 zeigt das komplette numerische Oberschenkelmodell mit allen Gewebetypen und Elektrodenmaterialien. Die aktive Elektrode befindet sich in einem Abstand von 260 mm vom Neutralelektrodenmittelpunkt. Dies ist ein typischer Abstand, wie er bei einem neutralelektrodennahen chirurgischen Eingriff in der Bauchregion vorkommt. Die Nähe der aktiven Elektrode zur Neutralelektrode wurde auch unter dem Gesichtspunkt gewählt, eine möglichst einseitige Anströmung der Neutralelektrode zu erzielen, was sich auch darin ausdrückt, dass die beiden stromführenden Elektrodenteile senkrecht und nicht parallel zur Hauptstromflussrichtung ausgerichtet wurden. Dies erfolgte im Gegensatz zur klinischen Anwendung, bei der aus Gründen der Symmetrisierung des Stromflusses durch das Gewebe die Elektrode immer so ausgerichtet wird, dass die erwartete Hauptstromflussrichtung parallel zur Teilungslinie der beiden Elektrodenhälften ist. Durch die in dieser Arbeit gewählte Anordnung wird die zur aktiven Elektrode näherliegende Hälfte der Neutralelektrode verstärkt angeströmt und es kommt zu einer größeren Asymmetrie der Wärmeverteilung, sowie zu einer höheren Maximaltemperatur auf der Hautoberfläche. Die Anwendung stellt den für die praktische Anwendung „schlimmsten Fall“ dar.

Das Gitter des numerischen Modells wurde entsprechend der Dimensionierung der Neutralelektrode angepasst. Die Netzlinien wurden an den Rändern der Neutralelektrode verdichtet, um eine gute numerische Approximation zu ermöglichen und die Elektrodengeometrie möglichst gut wiederzugeben. Durch die dünne Elektroden- und Hydrogelschicht, war es insbesondere notwendig entlang der Höhenachse des Modells besonders fein geometrisch aufzulösen. So ergab sich ein Gitternetz aus ca. 800 000 Voxeln mit unterschiedlichen Kantenlängen.

### 8.2.3 Durchführung der numerischen Modellierung

Das numerische Problem wurde zunächst im Frequenzbereich bei einer für die Elektrochirurgie typischen Frequenz von 350 kHz mit Hilfe des PSBCGR-Verfahrens des Programm Paketes MA-

FIA W3 gelöst (vgl. Abschnitte 2.3 und 5.2.1). Das numerische Verfahren wurde erst nach 25 000 Iterationsschritten beendet, da durch die großen Schrittweitenunterschiede in der Gitterauflösung bedingt durch die sehr dünne Elektrodenschicht die Konvergenzgeschwindigkeit des Algorithmus sich als sehr langsam herausstellte und erst nach mehr als 20 000 Iterationen eine zufriedenstellende Konvergenz erreicht werden konnte. Die Rechenzeiten betrugen für jedes Modell ungefähr 96 h auf einer IBM SP-SMP mit einem schnellen 512 MHz-Knoten bei einem Hauptspeicherbedarf von 1 GB.

Im Anschluss an die Lösung des elektrodynamischen Problems wurde die Leistungsabsorption im Oberschenkelmodell mit Hilfe von Gleichung (4.7) berechnet und mit Gleichung (4.8) die maximale Erwärmung auf der Hautoberfläche mit einer Schlimmsten-Falls-Betrachtung abgeschätzt (vgl. Abschnitt 4.2.3). Dazu wurde auf der Hautoberfläche und den angrenzenden Voxeln der Hydrogelschicht nach dem Punkt mit der maximalen Leistungsabsorption gesucht.

Danach wurde mit dem MAFIA-Modul H3 die Biowärmeleitungsgleichung im Zeitbereich gelöst, wie bereits in Unterkapitel 2.5 beschrieben wurde. Die physikalischen Parameter für die thermodynamischen Eigenschaften von Haut, Fett, Muskel und Blut, sowie den Elektrodenmaterialien sind in Tabelle B.1 aufgeführt. Die einzelnen Materialien wurden vor Beginn der Simulation auf eine konstante Anfangstemperatur gesetzt. Die Anfangstemperaturen sind in Tabelle 8.3 wiedergegeben. An der Oberfläche des Oberschenkelmodells wurde der Übergang vom Modell in die kühtere Umgebung als Kontakt mit einem fluiden Medium modelliert. Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  wurde auf  $75 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)$  gesetzt, was einer leichten Luftströmung entspricht (vgl. mit Abschnitt 5.3.1).

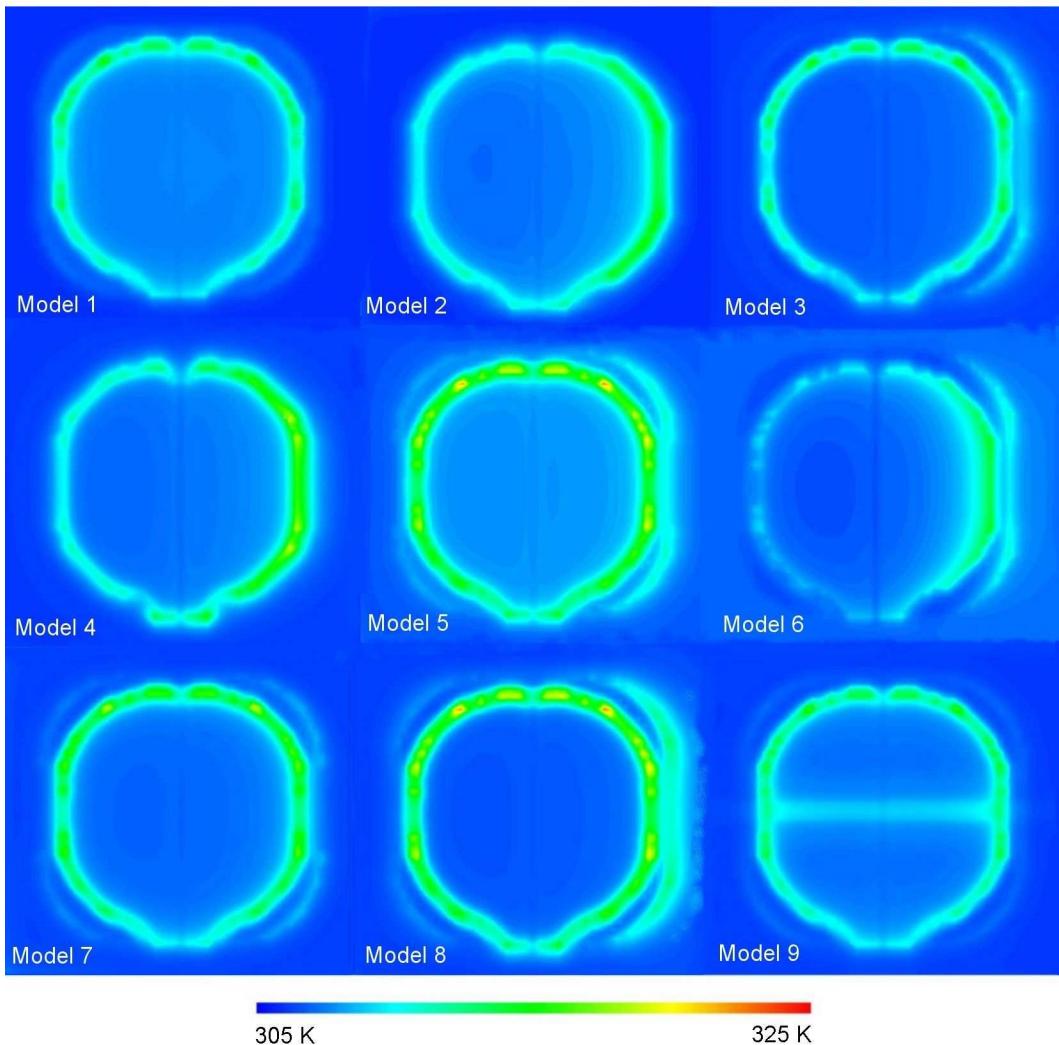
Die Stromflussdauer von 60 s wurde in 240 Einzelschritte von je 0,25 s Dauer aufgeteilt und mit dem impliziten Verfahren berechnet (vgl. Abschnitt 2.5.2). Die beim impliziten Verfahren notwendige Invertierung der Systemmatrix erfolgte nach kurzer Zeit mit sehr guter Konvergenz und ermöglichte dadurch eine Verkürzung der notwendigen Rechenzeit. Die Rechenzeiten des thermodynamischen Algorithmus betragen ungefähr 6 h.

Bei der thermodynamischen Rechnung wurde zunächst die Gewebedurchblutung vernachlässigt, da dieser Parameter einer großen physiologischen Schwankungsbreite unterliegt. Um die Auswirkung der Gewebedurchblutung einschätzen zu können, wurden im Anschluss einige thermodynamische Rechnungen unter Berücksichtigung der Gewebeperfusion durchgeführt. Die Werte für die hierzu verwendeten Gewebeperfusionsraten befinden sich in Tabelle B.1.

Als Stromstärke wurde bei den Berechnungen unabhängig von der AAMI Norm eine Stromstärke mit einem Mittelwert von 1 A verwendet. Als Qualitätsmerkmal für die berechneten Lösungen wurde die Stromstärke durch das Oberschenkelmodell und die Hydrogelschicht und mit der anregenden Stromstärke verglichen. Es zeigte sich, dass bei der gewählten hohen Anzahl an Iterationsschritten die Stromstärken durch das Gewebe und die Hydrogelschicht um weniger als 10 % vom Vorgabewert abwichen und damit in einem akzeptablen Rahmen lagen. Die resultierenden Erwärmungen sind proportional zum Quadrat der Stromstärke. Damit lassen sich dann die erhaltenen Ergebnisse mit verschiedenen Stromstärken in der medizinischen Praxis oder mit der Normvorgabe vergleichen.

#### 8.2.4 Ergebnisse der Simulationsrechnungen

Abbildung 8.7 zeigt neun von zehn Erwärmungsmuster, die sich mit dem gekoppelten elektrothermodynamischen Verfahren ohne Berücksichtigung der Gewebeperfusion nach einer simulier-



**Abbildung 8.7:** Maximaltemperatur auf der Hautoberfläche der Oberschenkelmodelle nach einer Stromflussdauer von 60 s berechnet mit dem gekoppelten elektro-thermodynamischen Verfahren. Die Bilder von Modell 1 mit Äquipotentialring und Modell 2 ohne Äquipotentialring veranschaulichen die Auswirkungen des Äquipotentialringes auf die Wärmeverteilung bei einer Fettschichtdicke von 12 mm und trockener Hautoberfläche. Im direkten Vergleich dazu geben die Bilder von Modell 3 und 4 die Wärmeverteilungen bei feuchter Hautoberfläche wieder. Die Ergebnisse von Modell 5 und 6 zeigen die Auswirkung der Fettschicht auf die Wärmeverteilung. Bei Modell 5 wurde eine Fettschicht von 20 mm angenommen. Bei Modell 6 wurde fehlte die Fettschicht komplett. Die Ergebnisse von Modell 7 und 8 zeigen die Wärmeverteilung bei einem Modell mit einer Fettschicht von 20 mm und trockener (Modell 7) und feuchter Haut (Modell 8). Modell 9 veranschaulicht die Auswirkung eines oberflächlichen Blutgefäßes auf die Entstehung von lokalen „heißen“ Stellen. Die Wärmeverteilung von Modell 10 fehlt in dieser Darstellung. Diese ist aber mit der von Modell 1 weitgehend identisch, da hier das tiefliegende Blutgefäß nur einen geringen Effekt auf die resultierende Wärmeverteilung hat.

ten Stromflussdauer von 60 s ergeben haben. Damit die einzelnen Ergebnisse besser miteinander verglichen werden können wurde für alle Einzelbilder die gleiche Temperaturfarbskala verwendet.

Modell 10 wurde bei dieser Darstellung nicht berücksichtigt, da dieses Modell kaum Abweichungen in seinem Erwärmungsmuster zu Modell 1 zeigte, da außer dem tiefliegenden Blutgefäß alle anderen physiologischen Parameter bei beiden Modellen identisch waren. Da die dielektrischen Eigenschaften von Blut denen der Muskulatur bei der betrachteten Frequenz von 350 kHz ähnlich sind (vgl. Tabelle B.1) sind die Ergebnisse nahazu identisch und Modell 10 liefert daher keine neuen Erkenntnisse.

Bei den Modellen 1 und 2, sowie 3 und 4 wurde die Auswirkung des Äquipotentialrings auf die entstehende Temperaturverteilung untersucht. Es zeigte sich, dass sich mit Äquipotentialring gleichmässigere balancierte Erwärmungsmuster ergeben und dadurch die Maximaltemperatur am Elektrodenrand deutlich reduziert werden kann. Bei den Modellen mit feuchter Hautoberfläche (3 und 4) ergaben sich im Vergleich zu den Modellen mit trockener Haut (1 und 2) die gleichen Ergebnisse bezüglich der Symmetrisierung der Erwärmungsmuster. Allerdings liegen bei feuchter Haut die erreichten Maximaltemperaturen über denen bei trockener Hautoberfläche.

Die Untersuchung der Auswirkungen der Fettschicht bei den Modellen 5 und 6 zeigte, dass eine dicke Fettschicht zwar das Erwärmungsmuster symmetrisiert, allerdings liegen die Maximaltemperaturen deutlich über den Werten, die sich bei Modell 6 ergaben, welches über keine Fettschicht verfügt. Der Vergleich zwischen trockener und feuchter Haut bei den Modellen 7 und 8 zeigt in Anlehnung an die Ergebnisse der Modelle 1, 2, 3 und 4, dass bei feuchter Haut generell mit höheren Erwärmungen zu rechnen ist.

Das Ergebnis von Modell 9 zeigt, dass oberflächliche Blutgefäße in der Fettschicht des Patienten einen großen Einfluss auf das entstehende Erwärmungsmuster haben können. Die modellierte Vene ergibt im Vergleich zu Modell 1 an den Elektrodenrändern größere Temperaturerhöhungen. In der Abbildung ist außerdem die Lage und der Verlauf des Blutgefäßes deutlich erkennbar.

In Tabelle 8.2 finden sich die ermittelten Maximaltemperaturen unter der Elektrode auf der Hautoberfläche nach einer Stromflussdauer von 60 s. In dieser Tabelle sind neben den Ergebnissen der gekoppelten elektro-thermodynamischen Simulation auch die mit Hilfe der Schlimmsten-Falls-Abschätzung nach Gleichung (4.8) ermittelten Maximaltemperaturen angegeben, die unter Vernachlässigung jeglicher Wärmetransportmechanismen aus der berechneten im Gewebe absorbierten Leistung abgeschätzt wurden.

Tabelle 8.2 gibt darüber hinaus auch die prozentualen Unterschiede der absoluten Maximaltemperaturen und der relativen Erwärmungen beider Verfahren an. Es zeigt sich, dass mit der Schlimmsten-Falls-Abschätzung in jedem Fall die Maximaltemperatur an der Hautoberfläche erwartungsgemäß überschätzt wird. Der Grad der Überschätzung, der durch die prozentualen Abweichungen der Maximalwerte untereinander angegeben wird, ist mitunter von Modell zu Modell sehr unterschiedlich. Als Mittelwert ergibt sich eine Überschätzung der relativen Temperaturzunahme um ca. 80 % durch die einfache Schlimmsten-Falls-Abschätzung. Die durchschnittliche Temperaturzunahme liegt mit der Schlimmsten-Falls-Abschätzung nach Tabelle 8.2 nach Mittelung aller zehn Ergebnisse bei 22,4 K und bei der thermodynamischen Betrachtung bei 12,5 K<sup>1</sup>.

Die Berücksichtigung der Gewebeperfusion ergibt erwartungsgemäß deutlich unterschiedliche Ergebnisse. Betrachtet man die zeitliche Entwicklung der Erwärmung an der Hautoberfläche von

---

<sup>1</sup>Diese Ergebnisse beruhen auf einer effektiven Stromstärke von 1,0 A, statt den durch die Norm geforderten 0,7 A.

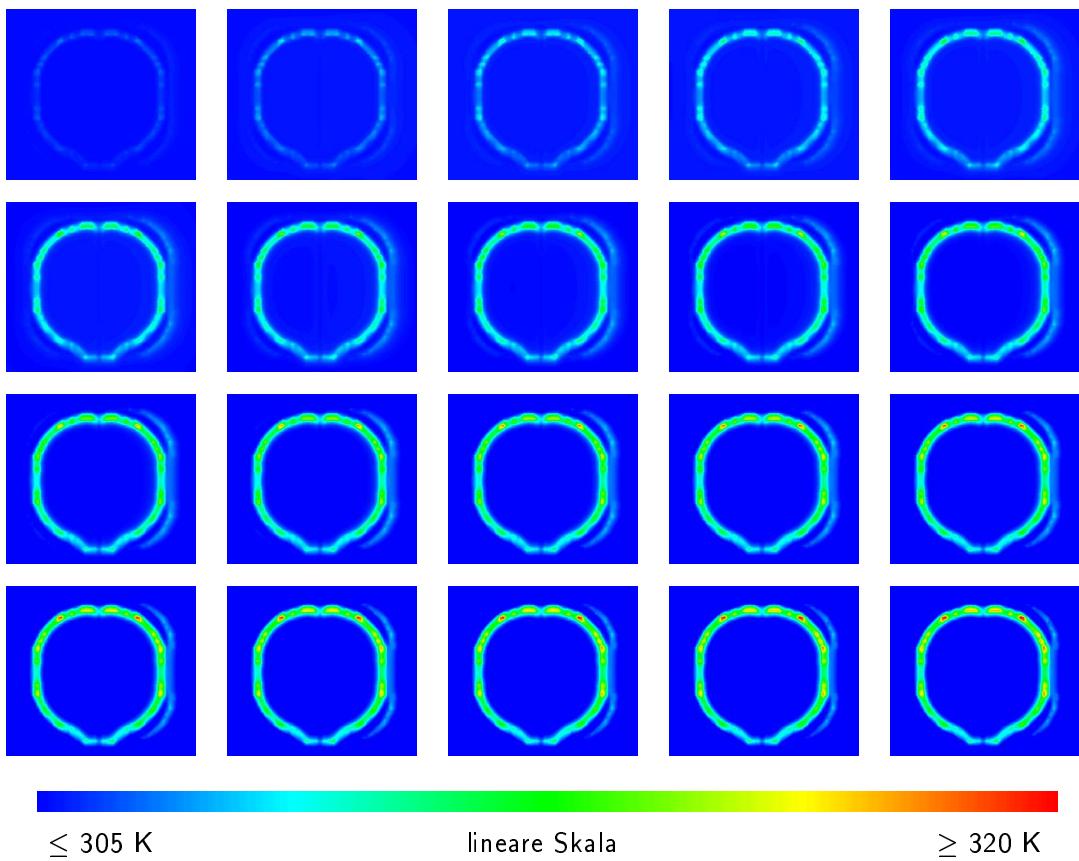
Modell	H3	W3	H3	W3	Abweichung	
	Maximaltemperatur in K	in K	maximale in K	Zunahme in K	absolut in %	relativ in %
1	313,6	318,3	8,6	13,3	1,5	54,7
2	316,9	334,3	11,9	29,3	5,5	146,2
3	315,2	312,6	10,2	16,6	2,0	62,8
4	319,9	326,3	14,9	21,3	2,0	43,0
5	322,6	328,9	17,6	23,9	2,0	35,8
6	313,2	317,1	8,2	12,1	1,3	47,6
7	319,9	336,1	14,9	31,1	5,1	108,7
8	323,4	325,8	18,4	20,8	0,7	13,0
9	316,5	331,8	11,5	26,8	4,8	133,0
10	313,8	334,2	8,8	29,2	6,5	231,8

**Tabelle 8.2:** Übersicht über die maximalen Hauttemperaturen nach einer Stromflussdauer von 60 s für jedes numerische Modell. Dabei werden die Ergebnisse der thermodynamischen Rechnung ohne Berücksichtigung der Gewebeperfusion (H3) mit den Ergebnissen der Schlimmsten-Falls-Abschätzung (W3) verglichen. Die Spalten zwei und drei geben dabei die Absolutwerte der Maximaltemperatur ausgehend von einer Anfangshauttemperatur von 305 K an. Die dazugehörige maximale relative Erwärmung wird in den Spalten vier und fünf wiedergegeben. Die Spalten sechs und sieben geben die prozentuale Abweichung der Ergebnisse der Schlimmsten-Falls-Abschätzung von den Maximalwerten des thermodynamischen Algorithmus an bezogen auf die Absolutwerte (Spalte sechs) und auf die maximale relative Erwärmung (Spalte sieben). Die Ergebnisse zeigen, dass mit der Schlimmsten-Falls-Abschätzung die Erwärmung stets überschätzt wird.

Modell 5 so zeigt sich in Abbildung 8.8, dass ohne Berücksichtigung der Perfusion ein konstantes Ansteigen der Hauttemperatur innerhalb der gesamten simulierten Zeitdauer von 60 s beobachtet werden kann, obwohl bereits Wärmeverluste an die kältere Umgebung berücksichtigt werden (vgl. mit der Diskussion thermodynamischer Randbedingungen in Abschnitt 2.4.2). Abbildung 8.9 zeigt denselben zeitlichen Verlauf bei Modell 5 unter Berücksichtigung der Gewebeperfusion mit den Durchschnittswerten nach Tabelle B.1.

Es zeigt sich, dass hierbei bereits nach 24 s eine annähernd konstante Temperaturverteilung auf der Hautoberfläche erreicht wird. Darüber hinaus findet auch eine zusätzliche Erwärmung der Hautschicht durch den Blutfluss statt, da die Anfangshauttemperatur mit 305 K unter der Bluttemperatur von 310 K liegt. Die nicht unter der Elektrode liegende Hautoberfläche erreicht somit im Verlauf der Simulation eine konstante Oberflächentemperatur von ca. 308 K, da dann der Wärmeeintrag durch den Blut- und Stromfluss, sowie der Wärmeverlust an die kältere Umgebung im Gleichgewicht sind.

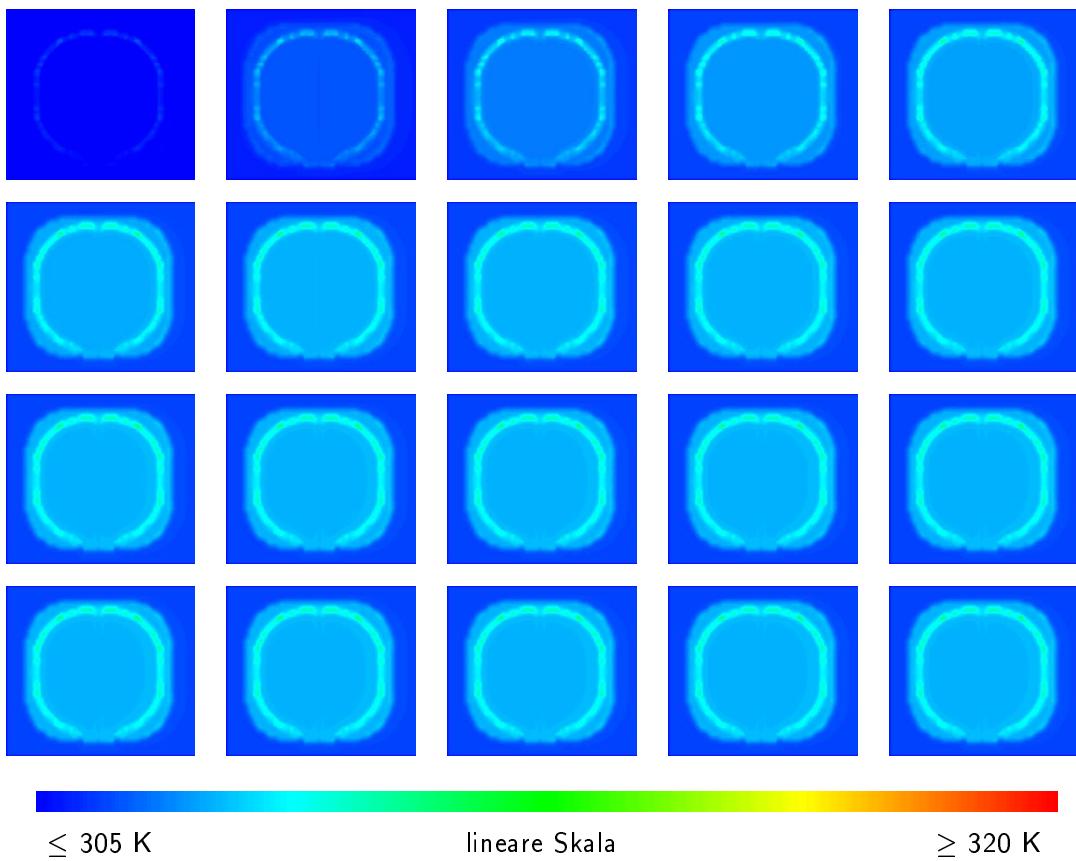
Gleicher gilt für Modell 2, bei dem auch eine zusätzliche Simulation mit Berücksichtigung der Gewebeperfusion durchgeführt wurde. Abbildung 8.10 zeigt die Hautoberfläche nach einer Stromflussdauer von 60 s zum einen mit, zum anderen ohne Berücksichtigung der Gewebeperfusion. Weitere Einblicke in die Auswirkung der Gewebeperfusion ermöglicht ein Differenzbild der beiden Temperaturverteilungen. Die wärmere Blutströmung durch die anfänglich kühlere Hautschicht



**Abbildung 8.8:** Zeitliche Entwicklung der Erwärmung auf der Hautoberfläche von Modell 5 ohne Gewebeperfusion. Die einzelnen Bilder von links nach rechts und von oben nach unten besitzen einen zeitlichen Abstand von 3 s. Das erste Bild links oben gibt die Temperaturverteilung nach einem Stromfluss von 3 s Dauer an. Das letzte Bild rechts unten gibt die Erwärmung nach einer Stromflussdauer von 60 s an. Die Simulation zeigt im Gegensatz zu Abbildung 8.9, bei der die Gewebeperfusion mit einfließt, dass sich nach 60 s noch keine konstante Temperaturverteilung eingestellt hat. Die Maximaltemperatur am Elektrodenrand würde bei einer längeren Stromflussdauer noch weiter ansteigen, obwohl bereits Wärmeverluste an die kältere Umgebung mit 293 K berücksichtigt wurden.

sorgt für eine generelle zusätzliche Erwärmung der Haut. Der Großteil der Hautoberfläche ist daher am Ende der Simulationszeit „wärmer“ bei Berücksichtigung der Gewebeperfusion. Der vorteilhafte Effekt der Durchblutung ist aber die Verringerung der Hauttemperatur an den Elektrodenrändern, der im Differenzbild zu erkennen ist. Die Durchblutung sorgt hierbei für eine Nivellierung der Hauterwärmung. Die maximale Hauttemperatur verringert sich bei Modell 2 durch die Durchblutung von 316,9 K um 6,0 K auf 310,9 K. Bei Modell 5, dessen verschiedene Temperaturverteilungen in Abbildung 8.11 dargestellt sind, verringert sich durch die Gewebeperfusion die maximale Hauttemperatur von 322,6 K um 9,8 K auf 312,8 K.

Abbildung 8.12 zeigt, dass bei Berücksichtigung einer leitenden Verbindung zwischen dem Äquipotentialring und den stromführenden Innenflächen der Neutralelektrode mit einem Widerstandswert von  $65 \text{ k}\Omega$  ein Minimum der maximalen Erwärmung auf der Hautoberfläche beobachtet werden kann. Ist der Äquipotentialring nicht mit den Innenflächen der Neutralelektrode

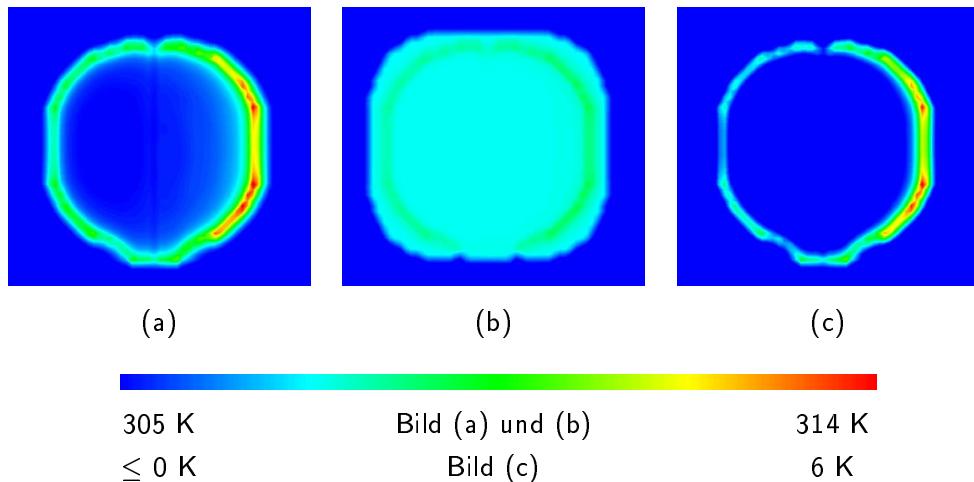


**Abbildung 8.9:** Zeitliche Entwicklung der Erwärmung auf der Hautoberfläche von Modell 5 mit Berücksichtigung der Durchblutung des Gewebes. Die einzelnen Bilder von links nach rechts und von oben nach unten besitzen einen zeitlichen Abstand von 3 s. Es zeigt sich, dass der Blutfluss einen ausgleichenden Effekt hat. Auf der einen Seite wird im Vergleich zu Abbildung 8.8 die maximale entstehende Temperatur am Neutralektrodenrand verringert. Weiterhin stellt sich diese Maximaltemperatur bereits nach 24 s auf einen konstanten Wert von 312,8 K ein, der bis zum Ende der Simulation beibehalten wird. Darüber hinaus findet aber auch eine Erwärmung der Hautschicht durch den Blutfluss statt, da die Bluttemperatur mit 310 K über der Anfangshauttemperatur von 305 K liegt. Innerhalb weniger Sekunden erreicht die Hautoberfläche neben der Auflagefläche der Neutralektrode eine konstante Temperatur von ca. 308 K. Die Hauttemperatur erreicht nicht ganz die Bluttemperatur von 310 K, da von der Hautoberfläche kontinuierlich Wärme an die kältere Umgebung mit 293 K abgegeben wird.

verbunden, so ergibt sich eine maximale Erwärmung von  $0,278 \text{ K/s}$  im Gegensatz zu  $0,243 \text{ K/s}$  bei einer leitenden Verbindung. Dies entspricht einer Reduktion der maximalen Erwärmung um 12,2 %.

### 8.2.5 Diskussion der numerischen Ergebnisse

Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass durch einen zusätzlichen Äquipotentialring um die stromführenden Flächen einer Neutralektrode die maximale Erwärmung am Elektrodenrand



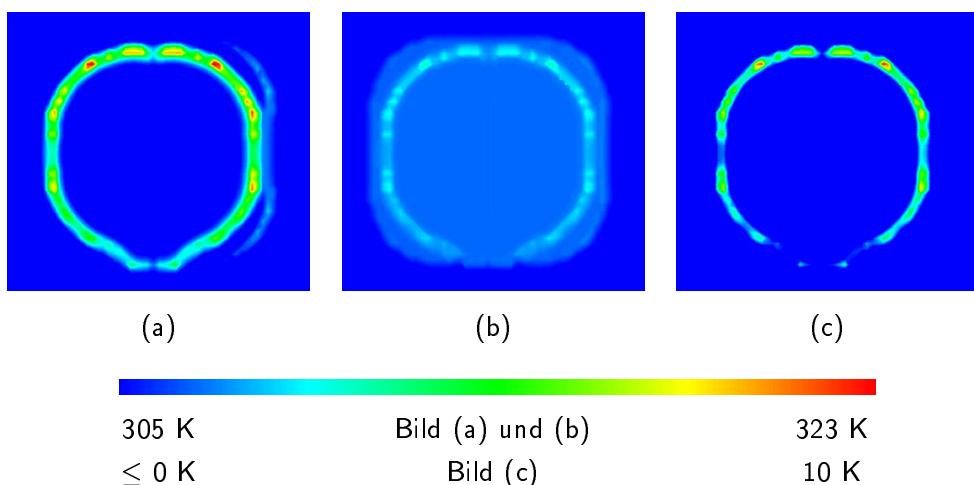
**Abbildung 8.10:** Vergleich der Temperaturverteilungen auf der Hautoberfläche von Modell 2 nach einer Stromflussdauer von 60 s. Abbildung (a) gibt die Verteilung ohne Berücksichtigung der Gewebeperfusion wieder. Bei Abbildung (b) wurde die Durchblutung berücksichtigt. Abbildung (c) gibt die Differenz zwischen den Abbildungen (a) und (b) wieder. Dabei wurde die Farbskala so normiert, dass nur die Bereiche eine von dunkelblau verschiedene Farbe haben, bei der die Endtemperatur von Abbildung (a) über der von Abbildung (b) liegt. Dies veranschaulicht, in welchen Bereichen die Temperatur bei Vernachlässigung der Gewebeperfusion überschätzt wird. Abbildung (b) verdeutlicht den ausgleichenden Effekt der Gewebedurchblutung. Zum einen wird die Maximaltemperatur an den Elektrodenrändern reduziert, zum anderen erwärmt sich die Haut unter der Elektrode, die nicht direkt mit der kühleren Umgebung von 293 K in Verbindung steht, von dem Startwert von 305 K annähernd auf die Bluttemperatur von 310 K. Die Hydrogelschicht hinterlässt dadurch einen „Abdruck“ auf der Hautoberfläche.

reduziert wird. Damit konnten die experimentell gefundenen Eigenschaften des neuen Neutralelektronendesigns numerisch bestätigt werden. Eine zusätzliche Reduktion der Erwärmung scheint möglich zu sein, wenn der Äquipotentialring mit den stromführenden Innenflächen der Neutral-elektrode über einen geeigneten Widerstand verbunden wird.

Weiterhin ergaben sich bei den numerischen Berechnungen auch Tendenzen für die maximale Erwärmung bezüglich der Unterschiede in den betrachteten physiologischen Parametern. Die thermodynamische Berechnung der Modelle 5 und 8 ergab im Vergleich mit den anderen Modellen die maximal beobachtete Erwärmung auf der Hautoberfläche. Beide Modelle verfügen über die dickste modellierte Fettschicht von 20 mm und über den gemischten (Modell 5) und den feuchten Hauttyp (Modell 8). Da der Maximalwert bei Modell 8 mit einer Zunahme von 18,4 K über dem von Modell 5 mit 17,6 K liegt, spielt auch die Hautfeuchtigkeit für die Erwärmung eine wichtige Rolle.

Dass mit zunehmender Fettschichtdicke und Hautfeuchtigkeit die maximale Erwärmung am Elektrodenrand ansteigt, zeigte sich auch in den experimentellen Studien von EDRICH UND COOKSON (1987) und PEARCE ET AL. (1979), die insbesondere bei Frauen höhere Erwärmungen an den Elektrodenrändern feststellten und dies mit der im Durchschnitt größeren Fettschichtdicke von Frauen erklärten.

Da nach Applikation einer Neutralelektrode auf der Haut eines Patienten die von den



**Abbildung 8.11:** Vergleich der Temperaturverteilungen auf der Hautoberfläche von Modell 5 nach einer Stromflussdauer von 60 s. Die weiterführen Erläuterungen zu Abbildung 8.10 gelten hier analog.

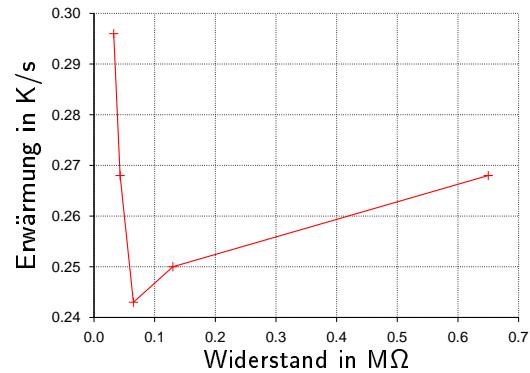
Schweissdrüsen abgegebene Feuchtigkeit nicht mehr verdunsten kann, ist davon auszugehen, dass die Erwärmungsmuster auf der Hautoberfläche des Patienten den Modellen mit gemischter oder feuchter Haut ähneln. Da die Leitfähigkeit der trockenen Haut um einen Faktor von mehr als 60 unter der feuchten Haut liegt, verhält sich die trockene Haut ähnlich einem Kondensator: in der Hautschicht entsteht in erster Linie eine Blindleistung, die zu keiner Erwärmung führt.

Die Fetschicht ihrerseits besitzt zwar nur eine im Vergleich zur Muskel- oder feuchten Hautschicht geringe Leitfähigkeit, ist aber auch durch ihre kleine relative Permittivität ein „schlechtes“ Dielektrikum, so dass hier die Leistung auch über ihren Wirkanteil durch das Gewebe transportiert werden muss. Aufgrund des bei einer dickeren Fetschicht höheren Gewebewiderstandes sind damit auch höhere Ausgangsspannungen notwendig, um die gewünschte Arbeitsstromstärke zu erzielen. Dies resultiert in höheren Potentialdifferenzen in der Hydrogel- und den Gewebe schichten und damit in höheren elektrischen Feldern und ohmschen Verlusten und führt damit im Endeffekt zu in einer größeren Erwärmung der Hautoberfläche.

Abbildung 8.13a zeigt die zeitliche Entwicklung der Erwärmung während der ersten drei Sekunden des Stromflusses unter dem rechten Rand des stromführenden Teils der Neutralelektrode an vier übereinanderliegenden Messpunkten in der Hydrogel-, Haut-, Fett- und Muskelschicht von Modell 7. Diese Betrachtung zeigt deutlich, dass die Wärmeentwicklung in der Hydrogelschicht am größten ist. Diese zieht nach kurzer Zeit die Temperatur in der Hautschicht mit, bevor die Fett- und die Muskelschicht folgen können. Nach zwanzig bis dreißig Sekunden Stromfluss verschwindet dieser Effekt in der Hautschicht und die Erwärmungskurve beginnt sich abzuflachen (vgl. Abbildung 8.13b). Diese Darstellung verdeutlicht auch die Tatsache, dass es für die Berechnung der Erwärmung mit der einfachen Abschätzung sinnvoll war, auch in der Hydrogelschicht nach Punkten maximaler Erwärmung zu suchen.

Die experimentell beobachtete Entstehung von lokalen heißen Stellen bei einigen Probanden wurde bereits in früheren experimentellen Studien von EDRICH UND COOKSON (1987) und NESSLER (1996) mit oberflächlichen Venen in Verbindung gebracht. Dieser Effekt konnte ebenfalls im Rahmen der numerischen Untersuchungen an Modell 9 nachvollzogen werden. Durch die

**Abbildung 8.12:** Wird der Neutralring über einen Widerstand mit den stromführenden Teilen der Neutralelektrode verbunden, so fließt ein Teilstrom über den Neutralring, was in einer Abnahme der Maximaltemperatur am Elektrodenrand resultiert. Bei einem Widerstand von  $65\text{ k}\Omega$  ergab sich bei Modell 3 ein Maximalwert der Randerwärmung von  $0,243\text{ K/s}$  anstatt  $0,278\text{ K/s}$  bei nicht verbundem Äquipotentialring.



im Vergleich zu Fettgewebe höhere Leitfähigkeit von Blut kommt es an den Stellen zu höheren Stromdichten, an denen sich eine oberflächliche Vene in der Nähe des Elektrodenrandes befindet. Da oberflächennahe Venen bei Patienten durchaus vorkommen können und zu beträchtlichen lokalen heißen Stellen führen, muss diesem schwer zu kontrollierenden Parameter in zukünftigen Studien besondere Bedeutung beigemessen werden. Möglicherweise muss auch die entsprechende AAMI-Norm überarbeitet werden, da zur Zeit die zufällige Auswahl einer Testperson mit oberflächlichen Venen das Ergebnis der Prüfung entscheidend beeinflussen kann.

Bei dem Vergleich der numerischen Verfahren hat sich gezeigt, dass das gekoppelte elektrothermodynamische Verfahren der einfachen Schlimmsten-Falls-Abschätzung überlegen ist. Der zusätzliche numerische Zeitaufwand für die thermodynamische Berechnung ist anhand der langen Rechendauer zur Lösung des elektromagnetischen Problems vertretbar, da er die Qualität und Aussagekraft der numerischen Ergebnisse entscheidend verbessert.

Die Berücksichtigung der Gewebeperfusion ist eine zusätzliche Option des thermodynamischen Algorithmus. Allerdings birgt dieser Parameter aufgrund seiner großen physiologischen Streubreite einige Gefahren, wenn es um die Bewertung sicherheitsrelevanter Fragestellungen geht. Wird in einer Studie die maximale Stromstärke ermittelt, bei der auf der Hautoberfläche des Modells die maximal zulässige Erwärmung auftritt, so ergibt sich durch die Berücksichtigung der Perfusion eine Verschiebung dieses Wertes zu höheren Stromstärken hin. Das Problem hierbei ist, die Perfusionsrate sinnvoll zu wählen, so dass Gefährdungen für jeden Patienten ausgeschlossen sind.

Es empfiehlt sich daher für sicherheitsrelevante Abschätzungen auf die Gewebeperfusion zu verzichten, um eine gute obere Grenze zu ermitteln. Diese obere Grenze liegt immer noch deutlich unter den Werten der Schlimmsten-Falls-Abschätzung und kann als sicher angesehen werden, da sie die Realität immer noch überschätzt aber besser annähert.

Die Berücksichtigung der Perfusionsrate bei sicherheitsrelevanten Studien wird daher als sinnvolle Ergänzung gesehen, indem bei einigen Modellen die Gewebeperfusion in zusätzlichen Berechnungen berücksichtigt wird und die so erhaltenen Ergebnisse mit den Berechnungen ohne Perfusion verglichen werden können. So kann man ein Maß für die mögliche Überschätzung der Erwärmung erhalten.

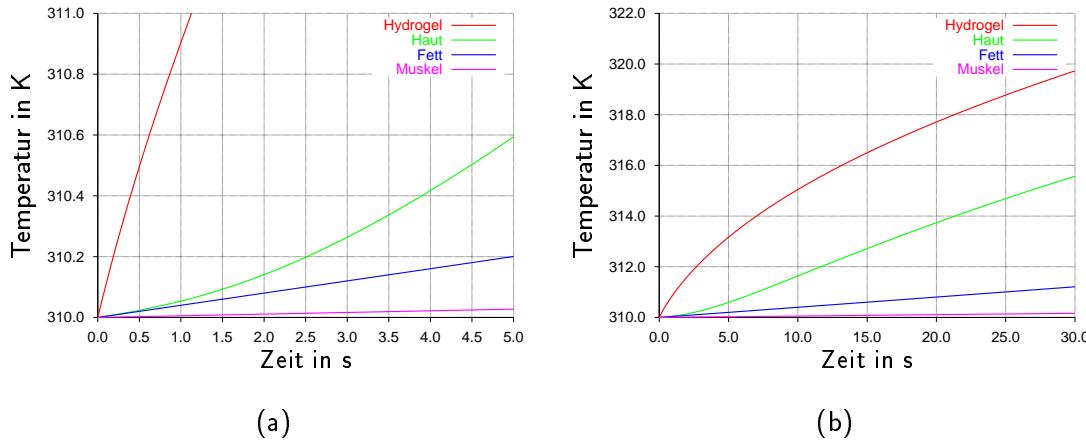
Im Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen der klinischen Studie zeigten sich in der numerischen Betrachtung eine deutliche Überschätzung der ermittelten Maximaltemperaturen selbst bei Verwendung des thermodynamischen Algorithmus. Dabei muss allerdings berücksichtigt werden, dass in der klinischen Studie eine geringere Stromstärke durch die Probanden verwendet

wurde und die numerischen Ergebnisse dementsprechend herunterskaliert werden müssen. Nach NESSLER ist dabei so zu verfahren, dass sich die Temperaturskalierung durch die Quadrate der beiden Stromstärken ergibt. Berücksichtigt man die mittlere Stromstärke von 0,7 A in der klinischen Studie und von 1 A in der numerischen Studie, so ergibt sich ein Skalierungsfaktor von 2 für die Temperaturwerte. Die durchschnittliche Erwärmung von 12,5 K würde sich dadurch reduzieren auf 6,3 K, was allerdings immer noch über dem experimentell ermittelten Durchschnittswert von 3,4 K liegt.

Betrachtet man in diesem Zusammenhang die Ergebnisse der thermodynamischen Berechnungen mit Gewebeperfusion, so zeigt sich, dass sich bei Berücksichtigung der Durchblutung die berechnete maximale Erwärmung in etwa halbiert. Die Temperaturzunahmen lagen dabei bei Modell 2 bei 5,9 K und bei Modell 5 bei 7,8 K. Legt man diese Werte für die Skalierung zugrunde so ergeben sich als skalierte Werte 3,0 K und 3,9 K, die in der Größenordnung der experimentell bestimmten Werte liegen und dann auch im Rahmen der zulässigen Erwärmungsgrenzwerte der AAMI HF18-Norm liegen (AAMI, 2001).

Die numerische Methode liefert damit dem Experiment gleichwertige Aussagen. Dies gilt auch für das Erwärmungsmuster auf der Hautoberfläche, welches sich bei Berücksichtigung der Gewebeperfusion den experimentell ermittelten Wärmebildern annähert (vgl. dazu die Abbildungen 8.10 und 8.11 mit 8.4). Vernachlässigt man die Perfusion wird dieser Effekt nicht so deutlich.

Die numerische Feldrechnung kann bei dieser Art von Problemen einen wertvollen Beitrag leisten, indem sie vor klinischen Studien eingesetzt wird, um *a priori* Aussagen über die Auswirkungen von Modifikationen an Geometrie, Material und technischem Aufbau auf das Erwärmungsmuster zu erhalten. Ungünstige Designs können dadurch bereits in einem frühen Stadium eines Projektes erkannt und vor aufwändigen experimentellen Studien ausgeschlossen werden, was Zeit und Kosten spart. Das numerische Modell liefert für die zu erwartende Erwärmung zwar nicht die notwendige physiologische Streubreite, die sich nur in klinischen Studien ermitteln lässt, gibt aber dennoch wertvolle Anhaltspunkte, die die Entwicklung und Konzeptionierung erleichtern.



**Abbildung 8.13:** Erwärmung an vier übereinanderliegenden Punkten unter dem rechten Rand der Neutralelektrode bei Modell 7 in den ersten fünf Sekunden des Stromflusses (a) und während dreißig Sekunden (b). Am stärksten erwärmt sich die Hydrogelschicht, die nach kurzer Zeit die Temperatur in der Hautschicht „mitzieht“, bevor die Fett- und die Muskelschicht folgen können (a). Nach zwanzig bis dreißig Sekunden Stromfluss verschwindet dieser Effekt in der Hautschicht (b).

## 8.3 Neutralelektroden für Kleinkinder

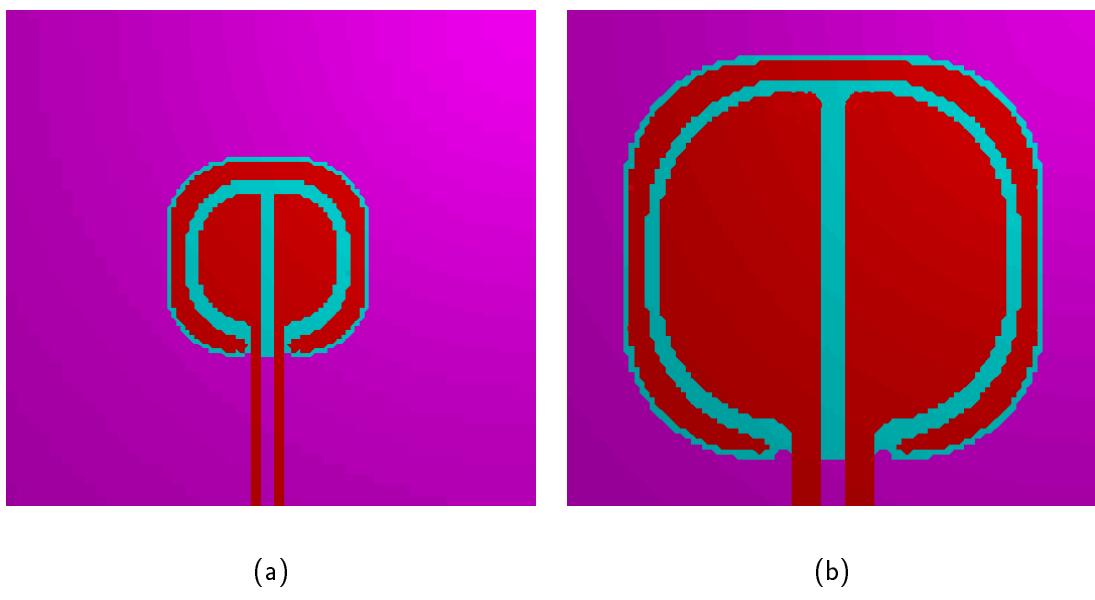
### 8.3.1 Vorteile einer Verkleinerung der Elektrodenfläche

Die Berücksichtigung der AAMI HF-18 Norm führt anhand von experimentellen Studien und anderen Erfahrungswerten zu einer sicheren Mindestgröße für Neutralelektroden. Die gewählten Dimensionen sind aber für eine Applikation an Kleinkindern und Babys ungeeignet, da aufgrund der Größe der Neutralelektrode diese nicht beliebig an Armen oder Beinen aufgeklebt werden können. Im Gegensatz zu Anwendungen bei Erwachsenen werden bei operativen Eingriffen an Kleinkindern generell geringere Stromstärken des Hochfrequenzgenerators verwendet.

Die AAMI HF-18 Norm sieht bei Tests von Neutralelektroden für Kinder nur eine mittlere Stromstärke von 500 mA ( $\pm 10\%$ ) vor, im Gegensatz zu 700 mA bei Erwachsenen (AAMI, 2001). In Anlehnung an Neutralelektroden für Erwachsene darf eine Neutralelektrode für Kleinkinder nach einer Gesamtstromflussdauer von 60 s ebenfalls keine Erwärmung über 6 K an irgendeinem beliebigen Punkt auf der Hautoberfläche zeigen. Da die zu erwartende Erwärmung nach NESSLER (1999) proportional zum Quadrat der Stromstärke ist, ergibt sich mit dieser Annahme, dass den Vorgaben entsprechend die zu erwartenden Erwärmungen bei Verwendung einer mittleren Stromstärke von 500 mA nur etwa halb so groß sind, wie bei einem Teststrom von 700 mA.

Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, dass bei einer geringeren Stromstärke in der klinischen Applikation die Elektrodenfläche gefahrlos unter Einhaltung der vorgeschriebenen Sicherheitsgrenzwerte verkleinert werden kann. Zur Ermittlung dieser minimalen Elektrodenfläche könnten nun in zahlreichen experimentellen Untersuchungen Prototypen mit unterschiedlichen Skalierungen an Probanden getestet werden.

Im Gegensatz zu aufwändigen experimentellen Untersuchungen wird im folgenden gezeigt, wie mit Hilfe des gekoppelten elektro-thermodynamischen Verfahrens diese minimale Elektrodenfläche ermittelt werden kann.



**Abbildung 8.14:** Geometrie der Neutralelektrode bei unterschiedlichen Skalierungen. Bild (a) zeigt die Neutralelektrode (rot) auf der Hydrogelschicht (türkis) und der Haut (rosa) mit einem Skalierungsfaktor von 40 % im Vergleich zur ursprünglichen Elektrodengröße von 100 % auf der rechten Seite in Bild (b). Die Dicke des Neutralringes wurde in beiden Fällen konstant gehalten.

Gewebe / Material	Dicke in mm	Anfangstemperatur in K
Aluminium	0,025	302
Hydrogel	0,35	305
Haut	0,4	305
Fett	2,5	307
Muskel	50,0	310

**Tabelle 8.3:** Dicke der einzelnen Gewebeschichten und Materialien des Kleinkinderoberschenkelmodells, sowie die Anfangstemperaturen der einzelnen Gewebeschichten für die thermodynamische Berechnung für das Erwachsenen- sowie das Kleinkindermodell.

### 8.3.2 Numerisches Modell und Rechenstrategie

Die numerischen Untersuchungen wurden analog zum Modell für Erwachsene an einem quaderförmigen Gewebeblock durchgeführt, der aus einer Muskel-, Fett- und Hautschicht aufgebaut ist. Der Block besitzt eine Breite von 180 mm, eine Länge von 400 mm und eine Höhe von 52,9 mm. Weitere Modellparameter finden sich in den Tabellen B.1, B.4 und 8.3. Besonderheiten beim Aufbau des Gewebeblockes ergeben sich durch die unterschiedliche Dicke von Haut und Fettgewebe bei Kleinkindern im Vergleich zum Erwachsenen. Wie Tabelle 8.3 zeigt, ist z. B. die Haut mit 0,4 mm im Vergleich zu 2 mm beim Erwachsenen um den Faktor 5 dünner. Als Hauttyp wurde der Mischtyp zwischen feuchter und trockener Haut angenommen.

Skalierung	Knotenpunkte	Stromstärke Hydrogel in A	Leistung Haut in W	Erwärmung „Worst-Case“ in K	Erwärmung
					H3 in K
40 %	698 152	0,714	0,359	43,6	30,2
50 %	697 878	0,716	0,264	21,8	14,0
60 %	733 320	0,725	0,225	12,5	7,8
70 %	788 256	0,716	0,207	8,0	5,0
80 %	887 040	0,729	0,191	6,2	4,3
90 %	976 248	0,715	0,178	5,7	3,6
100 %	1 092 000	0,733	0,151	5,4	2,9

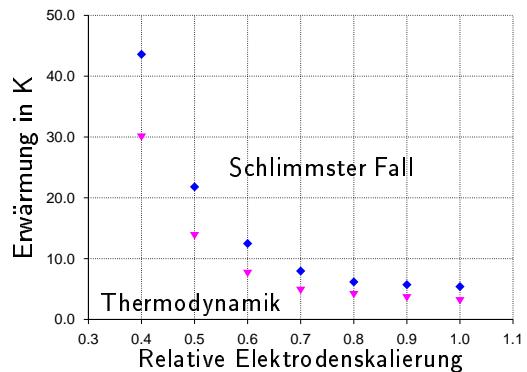
**Tabelle 8.4:** Ergebnisse der Berechnungen des Kinderoberschenkelmodells. Für jede berechnete Elektrodenskalierung sind die Gesamtanzahl der Gitterknotenpunkte des numerischen Modells angegeben. Ein Maß für die Qualität der numerischen Lösung ist die Stromstärke durch die Hydrogelschicht des Modells, die dem Spitzenwert der eingeprägten Stromstärke von 776 mA entsprechen muss. Die in der Hautschicht umgesetzte Leistung gibt einen Hinweis auf die zu erwartende Erwärmung und wird für die Berechnung der Schlimmsten-Falls-Abschätzung benötigt. Die angegebenen Erwärmungen geben die maximalen gefundenen Temperaturunterschiede am „heißesten“ Punkt der Hautoberfläche an. Zulässig ist eine maximale Erwärmung um 6 K. Danach richtet sich dann die kleinstmögliche Elektrodenskalierung.

Die aktive Elektrode befindet sich wie in den bereits vorgestellten Oberschenkelmodellen für Erwachsene in einem Abstand von 260 mm vom Elektrodenmittelpunkt. Die Größe der Neutralelektrode wurde ausgehend von den geometrischen Dimensionen der Erwachsenenelektrode nach Abbildung 8.2 sukzessive verkleinert. Dabei wurden die beiden Längendimensionen vor jeder neuen Berechnung jeweils um den gleichen Skalierungsfaktor verringert. Die Dicke der Neutralelektrode blieb dabei konstant, genauso wie die Breite des Neutralringes, da es aus produktionstechnischen Gründen nicht möglich ist, diesen Ring als Stanzteil dünner zu fertigen, ohne dessen Stabilität bei der klinischen Applikation zu gefährden. Die absolute Skalierung der Elektrode wurde ausgehend von der Anfangsgröße 100 % in Schritten von 10 % bis auf 40 % verringert. Abbildung 8.14 zeigt die numerischen Neutralelektrodenmodelle mit einer Skalierung von 40 % im Vergleich zur Ausgangsgröße von 100 %.

Das Gitter des numerischen Modells wurde im Unterschied zum Erwachsenenmodell den unterschiedlichen Skalierungen der Neutralelektrode automatisch angepasst. Die Netzlinien wurden passend zur gewählten Skalierung an den Rändern der Neutralelektrode verdichtet, um eine gute numerische Approximation zu ermöglichen und auch bei einer kleinen Skalierung die Elektrodengeometrie möglichst gut wiederzugeben. Aufgrund der unterschiedlichen Netzstrukturen ergaben sich bei den einzelnen Modellen verschiedene große Gesamtanzahlen an Gitterpunkten zwischen 700 000 Knotenpunkten bei einer Skalierung von 40 % und bis zu 1 100 000 Knotenpunkten bei einer Skalierung von 100 %.

Als Maß für die Qualität der numerischen Lösung wurde wiederum der Gesamtstrom durch die Hydrogelschicht und den Gewebeblock überwacht, der der eingeprägten Stromstärke entsprechen muss. Aufgrund der großen Gitterschrittweitenunterschiede, die aufgrund der Modellierung der sehr dünnen Hydrogel- und Aluminiumschicht notwendig waren, zeigte sich, dass sich erst bei

**Abbildung 8.15:** Vergleich der maximalen Erwärmungen auf der Hautoberfläche berechnet mit einer einfachen Abschätzung unter Vernachlässigung von Wärmetransportmechanismen und mit dem thermodynamischen Löser. Die Ergebnisse zeigen deutlich die Überschätzung der Erwärmung bei Vernachlässigung des Wärmetransports.



einer sehr großen Anzahl an Iterationsschritten ( $> 20\,000$ ) ein zufriedenstellender Wert der Gesamtstromstärke durch die Hydrogelschicht ergab. Es wurden daher für jedes Modell wie beim Erwachsenenmodell 25 000 Iterationsschritte berechnet. Eine weitere Erhöhung der Iterationsschritte auf 50 000 brachte am Beispiel des Modells mit der Skalierung von 100 % keine wesentliche Verbesserung der Lösung, so dass auf eine weitere Erhöhung der Iterationsschritte verzichtet wurde. Tabelle 8.4 zeigt, dass die berechneten Gesamtstromstärken durch die Hydrogelschicht stets unter der anregenden Stromstärke liegen, die Abweichungen aber nicht mehr als 9,2 % betragen und somit in einem akzeptablen Rahmen liegen.

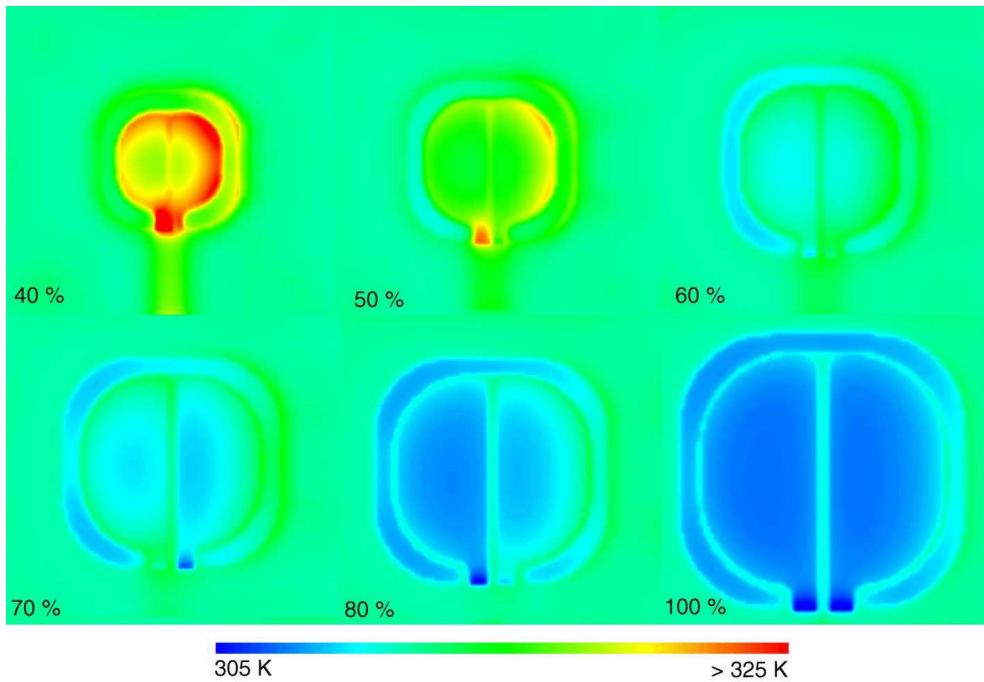
Die Rechenzeiten betrugen je nach Dimension des Gitternetzes zwischen 72 h und 96 h auf einer IBM SP-SMP mit 512 MHz bei einem Hauptspeicherbedarf von maximal 1 GB. Die Rechenzeiten des thermodynamischen Lösen betrugen ungefähr 6 h. Die Stromflussdauer von 60 s wurde in 240 Einzelschritte von je 0,25 s Dauer aufgeteilt und mit dem impliziten Verfahren berechnet.

Der vorgeschriebene Mittelwert des Teststromes beträgt 500 mA (effektiv) mit einer zulässigen Schwankung von  $\pm 10\%$  (AAMI, 2001). Bei einer konservativen Abschätzung empfiehlt es sich, die zulässige Obergrenze des Teststromes zu wählen. Man erhält so bei Annahme eines maximal möglichen Mittelwertes von 550 mA eine Maximalamplitude von 776 mA, die als Eingabeparameter zur Berechnung der Verlustleistung im Frequenzbereich diente.

Auf die Lösung des elektromagnetischen Feldproblems folgte analog zum Erwachsenenmodell eine Schlimmsten-Falls-Abschätzung der Erwärmung durch Einsetzen der berechneten Verlustleistung in Gleichung (4.8), bevor diese in einem zweiten Schritt für den thermodynamischen Algorithmus verwendet wurde. Bei der thermodynamischen Berechnung wurde die Gewebeperfusion nicht berücksichtigt.

### 8.3.3 Ergebnisse der numerischen Berechnung

Die in der obersten Hautschicht (gemischter Hauttyp) deponierte Leistung steigt nach Tabelle 8.4 bei Verkleinerung der Elektrodenfläche stetig an, da bei Verkleinerung der Elektrodenfläche die durchschnittliche Stromdichte bei konstantem Gesamtstrom notwendigerweise ansteigen muss. Die Punkte mit maximaler Energieabsorption wurden auf der Hautoberfläche und in den angrenzenden Voxeln der Hydrogelschicht gesucht und zur Berechnung der Hauttemperatur mit der Schlimmsten-Falls-Abschätzung nach Gleichung (4.8) verwendet. Sie sind in Tabelle 8.4 aufgeführt. Wie erwartet liegen diese Werte deutlich über den mit dem thermodynamischen Algorithmus berechneten Hauttemperaturen.



**Abbildung 8.16:** Maximale Hauttemperatur bei Verkleinerung der Neutralelektrodenfläche. Die einzelnen Bilder zeigen die erreichte Maximaltemperatur nach 60 s Stromfluss bei unterschiedlichen Skalierungen der Neutralelektrode. Bei Verkleinerung der Elektrodenfläche wird die Wärmeverteilung zunehmend unsymmetrischer und es ergeben sich heiße Stellen auf der der aktiven Elektrode (hier: rechts) zugewandten Seite.

Nach den geltenden Vorschriften (AAMI, 2001) liegt die maximal zulässige Erwärmung nach einer Stromflussdauer von 60 s bei 6 K. Anhand der Werte aus Tabelle 8.4 ergeben sich dadurch unterschiedliche zulässige Elektrodenskalierungen je nach verwendeter Temperaturabschätzungs-methode. Bei Betrachtung des Schlimmsten-Falls wird dieser Grenzwert schon bei einer Skalierung von 80 % überschritten, wohingegen die thermodynamische Betrachtung eine Skalierung zwischen 60 % und 70 % zulässt (siehe auch Abbildung 8.15).

Abbildung 8.16 zeigt die Temperatur auf der Hautoberfläche nach einer Stromflussdauer von 60 s. Die Ergebnisse zeigen, dass bei einer Verkleinerung der Elektrodenfläche neben der Zunahme der maximalen Hauttemperatur nach und nach die symmetrisierende Wirkung des Neutralringes verloren geht. Dieser Effekt ist bereits bei einer Skalierung von 80 % erkennbar. Die aktive Elektrode befindet sich hierbei rechts von der abgebildeten Neutralelektrode. Wie bereits in Tabelle 8.4 gezeigt, steigen die maximalen Hauttemperaturen bei Verkleinerung der Elektrodenfläche an. Dabei zeigen sich die maximalen Erwärmungen insbesondere an der der aktiven Elektrode zugewandten (hier: rechten) Seite der Neutralelektrode. Eine Besonderheit ist an der linken Stromrückführung der Neutralelektroden mit einer Skalierung von 40 % und 50 % in Abbildung 8.16 zu erkennen. Die Berechnungen ergaben hier die Entstehung einer weiteren „heißen“ Stelle.

### 8.3.4 Diskussion der numerischen Ergebnisse

Die in Tabelle 8.3 angegebenen Anfangstemperaturen der einzelnen Materialien und Gewebtypen zeigten in der thermodynamischen Berechnung einen Nebeneffekt. Aufgrund der geringen Dicke der Hautschicht, trugen die höheren Anfangstemperaturen der Fett- und Muskelschicht zu einer zusätzlichen Erwärmung der Hautoberfläche bei. Dieser Effekt war bei der Berechnung des Erwachsenenschichtmodells aufgrund der größeren Hautdicke kaum zu beobachten. Die Elektrode ihrerseits führte zu einer lokalen Verzögerung der Erwärmung wie dies insbesondere in der Elektrodeninnenfläche bei den Skalierungen 100 % und 80 % bei Abbildung 8.16 zu sehen ist.

Da die Anfangswärme aus der tieferliegenden Fettschicht während der Simulationszeit die darüberliegende dünne Hautschicht mit erwärmt, ergibt sich dadurch ein zusätzlicher Beitrag für die Hauttemperatur am Simulationsende. Dadurch wird die Erwärmung an der Hautoberfläche generell um ca. 2 K überschätzt. Man kann daher in diesem Fall von einer höheren Anfangstemperatur der Haut ausgehen. So ergibt sich nach Tabelle 8.4, dass die nach der Norm maximal zulässige Erwärmung rechnerisch von 6 K auf 8 K erhöht werden kann und dadurch auch kleinere Skalierungen der Neutralelektrode als bisher angenommen die Grenzwerte einhalten dürften. Durch die gewählten Anfangstemperaturen wurde daher die absolute Erwärmung auf der Hautoberfläche eher überschätzt.

Eine Alternative zu dieser Betrachtung wäre eine Anpassung der Anfangstemperaturverteilung, indem entweder eine höhere Hauttemperatur oder ein angepasster Temperaturabfall in der darunter liegenden Fett- und Muskelschicht angenommen wird. Die Berücksichtigung der Gewebeperfusion in diesem Beispiel wäre eine andere Alternative, bei der zunächst ohne Stromfluss so lange gerechnet wird, bis das Modell mit der Umgebung im therodynamischen Gleichgewicht ist, d. h. sich von selbst ein Temperaturgradient in den Gewebschichten eingestellt hat.

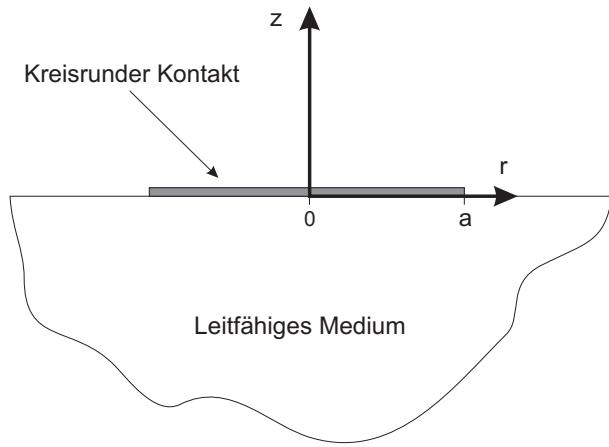
Im Sinne einer konservativen Abschätzung unter besonderer Berücksichtigung der Patientensicherheit ist diese Auffälligkeit aber kein Nachteil, da dadurch die Erwärmung stets überschätzt wird, wenngleich weitere Möglichkeiten zur Verbesserung der numerischen Modellierung im vorigen Absatz aufgezeigt wurden.

## 8.4 Abschätzung der Erwärmung der Kleinkinderelektrode

### 8.4.1 Theoretische Vorarbeiten

Bereits im Jahre 1982 wurde von WILEY UND WEBSTER eine theoretische Arbeit vorgestellt, die sich mit dem Problem der Randerwärmung bei Neutralelektroden beschäftigte. Dabei konnten erstmals die von OVERMYER ET AL. (1979) aufgestellten Vermutungen über Stromdichtenzunahmen am Elektrodenrand und damit verbunden die Entstehung von höheren Hauttemperaturen analytisch mit einem einfachen Neutralelektrodenmodell nachgewiesen werden.

Abbildung 8.17 zeigt die dabei angenommene rotationssymmetrische Geometrie mit einer kreisrunden Neutralelektrode mit Radius  $a$ , die auf ein unendlich großes leitfähiges Medium aufgebracht ist. Die für einen Stromfluss notwendige Gegenelektrode befindet sich in unendlicher Entfernung in negativer z-Richtung. So bleibt die Rotationssymmetrie erhalten und das Problem kann in Zylinderkoordinaten formuliert werden.



**Abbildung 8.17:** Schnittbild der analysierten kreisrunden Neutralenlektrode. Eine kreisrunde Scheibe mit dem Radius  $a$  ist auf einer unendlich großen leitfähigen Platte aufgebracht. Die Gegenelektrode wird in unendlicher Entfernung angenommen, um das Problem in Zylinderkoordinaten lösen zu können (WILEY & WEBSTER, 1982).

Es sei angenommen, dass die Neutralenlektrode auf dem konstanten quasistatischen Potential  $V_0$  liege. Um die korrespondierende Stromdichte  $J(r, z)$  zu berechnen muss die Laplacegleichung allgemein für das Potential  $V$

$$\Delta V = 0$$

mit den gegebenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} V &= V_0 && \text{für } z = 0, r \leq a \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= 0 && \text{für } z = 0, r > a \end{aligned}$$

gelöst werden. Dieses Problem stellt ein klassisches Problem mit gemischten Randbedingungen dar, für das exakte Lösungen bekannt sind (JACKSON, 1975). Die allgemeine Lösung für dieses Problem besteht aus einer Superposition von Exponential- und Besselfunktionen nullter Ordnung und kann als geschlossener Ausdruck angegeben werden:

$$V(r, z) = \int_0^\infty A(k) e^{-k|z|} J_0(kr) dk , \quad (8.1)$$

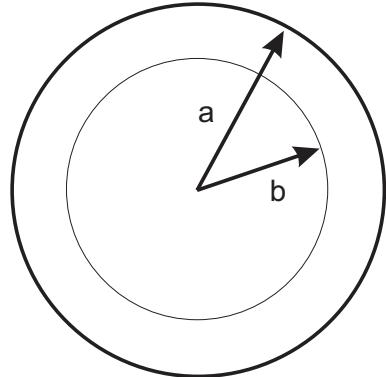
wobei  $J_0$  eine Besselfunktion ist und  $k$  ein Parameter mit der Einheit einer inversen Länge. Wendet man die Randbedingungen auf Gleichung (8.1) an, so ergibt sich als Lösung:

$$V(r, z) = \frac{2V_0}{\pi} \sin^{-1} \left( \frac{2a}{\sqrt{(r-a)^2 + z^2} + \sqrt{(r+a)^2 + z^2}} \right) . \quad (8.2)$$

Berücksichtigt man die Leitfähigkeit  $\sigma$  des Mediums so erfolgt die Ableitung der Stromdichte  $\vec{J}(r, z)$  durch einfache Anwendung von

$$\vec{J}(r, z) = \sigma \vec{E}(r, z) = -\sigma \vec{\nabla} V(r, z) .$$

**Abbildung 8.18:** Skizze einer kreisrunden Neutralelektrode mit dem Gesamtradius  $a$ . Im weiteren Verlauf der Herleitung der Näherungslösung wird jeweils ein Teilgebiet der Elektrodenfläche betrachtet und im Text zwischen dem Innenkreis mit Radius  $b$  und einem Außenring unterschieden.



Diese Ableitung führt schließlich zur Stromdichte in z-Richtung an der Kontaktstelle zwischen Neutralelektrode und leitfähigem Medium (WILEY & WEBSTER, 1982):

$$J_z(r, 0) = \frac{2\sigma V_0}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} . \quad (8.3)$$

#### 8.4.2 Berechnung der Gesamtstromstärke durch die Elektrode

Um die Stromdichte in z-Richtung an der Unterseite der kreisrunden Neutralelektrode mit dem Radius  $a$  in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  zum Kreismittelpunkt anzugeben kann nach WILEY UND WEBSTER bei einer mittleren Stromdichte  $J_0$  Gleichung (8.3) umgeformt werden zu

$$J_z(r) = \frac{J_0}{2\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} . \quad (8.4)$$

Gleichung (8.4) zeigt, dass die Stromdichte an den Rändern der Neutralelektrode ansteigt, die Innenfläche einer Neutralelektrode nur einen kleinen Beitrag zur Gesamtstromaufnahme leistet. In Abbildung 8.19a wird dieser Zusammenhang veranschaulicht. Nach Gleichung (8.4) steigt die Stromdichte an den Elektrodenrändern über alle Grenzen. Dies stellt eine Abweichung von den tatsächlichen Verhältnissen dar, die von WILEY UND WEBSTER mit der Tatsache begründet wird, dass in ihrem Modell die Neutralelektrode als unendlich dünn angenommen wurde und an den Elektrodenkanten ein abrupter Potentialsprung als Randbedingung angenommen wurde, der so in der Realität nicht vorkommt.

Zur Berechnung des Gesamtstromes durch die Neutralelektrode in z-Richtung muss Gleichung (8.4) über die Kreisfläche integriert werden. Für den weiteren Verlauf der Herleitung wird hierbei eine Variable  $b$  als Radius eines beliebigen Innenkreises innerhalb der Elektrodenfläche als Integrationsgrenze eingeführt (siehe Abbildung 8.18). Der Teilstrom  $I_b$  durch eine beliebige Innenkreisfläche der kreisrunden Elektrode mit Radius  $a$  berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned}
 I(b) &= \int_0^b \int_0^{2\pi} J_z(r) \cdot r \, d\varphi \, dr \\
 &= \frac{J_0 a}{2} \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, d\varphi \, dr \\
 &= \frac{J_0 a}{2} 2\pi \int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr \\
 &= J_0 a \pi \cdot \left[ -\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^b \\
 &= J_0 a \pi \cdot \left( -\sqrt{a^2 - b^2} + a \right) \\
 &= J_0 a^2 \pi \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \quad \text{mit } b \leq a . \tag{8.5}
 \end{aligned}$$

Die mittlere Stromdichte  $J_0$  ist identisch zum Gesamtstrom  $I_0$  geteilt durch die Gesamtkreisfläche  $\pi a^2$  gemäß

$$J_0 \equiv \frac{I_0}{\pi a^2} . \tag{8.6}$$

Mit dieser Identität kann Gleichung (8.5) umgeformt werden zu

$$I(b) = I_0 \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) . \tag{8.7}$$

Wie aus Gleichung (8.7) ersichtlich ist, ergibt sich im Grenzfall  $b = a$  für  $I(b = a)$  wie erwartet der Gesamtstrom  $I_0$ .

#### 8.4.3 Veranschaulichung der Stromaufnahme der kreisrunden Elektrode

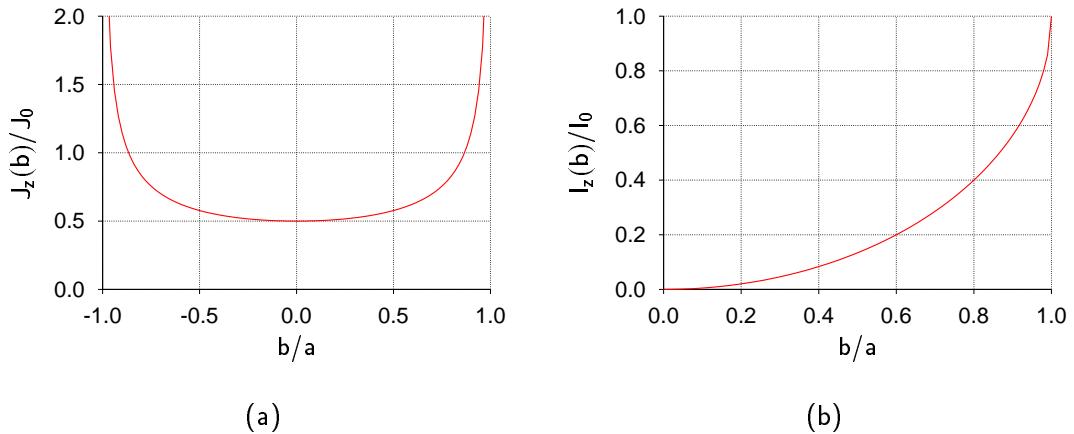
Mit Hilfe von Gleichung (8.7) kann die Stromaufnahme einzelner Teilbereiche der Elektrode genauer untersucht werden. Im folgenden sei

$$\Delta I = \frac{I(b)}{I_0} = \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \tag{8.8}$$

das Verhältnis aus Strom  $I(b)$  durch einen beliebigen Elektrodeninnenkreis mit Radius  $b$  zum Gesamtstrom  $I_0$ . In Abbildung 8.19 ist dieses Verhältnis gegen das Verhältnis aus Innenkreisradius  $b$  zu Elektrodenradius  $a$  aufgetragen. Es zeigt sich, dass ein Großteil des Gesamtstromes über eine relativ kleine Fläche in den Außenbereichen der Neutralelektrode fließt.

Dies wird verdeutlicht, wenn man Gleichung (8.8) nach dem Radienverhältnis  $k_r = \frac{b}{a}$  auflöst:

$$k_r = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - (1 - \Delta I)^2} . \tag{8.9}$$



**Abbildung 8.19:** Vergleich zwischen Stromdichte (a) und Gesamtstrom (b) einer kreisförmigen Neutralelektrode mit Radius  $a$  in Abhängigkeit vom Abstand  $b$  zum Mittelpunkt. Auf der linken Seite ist das Verhältnis zwischen punktueller Stromdichte zur über die Gesamtfläche gemittelten Stromdichte über den Abstand aufgetragen. Die rechte Seite zeigt das Verhältnis zwischen Strom durch einen beliebigen Innenkreis und Gesamtstrom über dem Abstand. Anhand Abbildung (b) ist zu erkennen, dass der größte Anteil des Gesamtstromes in den Außenbereichen der Elektrode über eine relativ kleine Fläche gesammelt wird. Der Kurvenverlauf zeigt, dass im Innenkreis mit einem Radius von  $0,866 \cdot a$  nur die Hälfte des Gesamtstromes fließen.

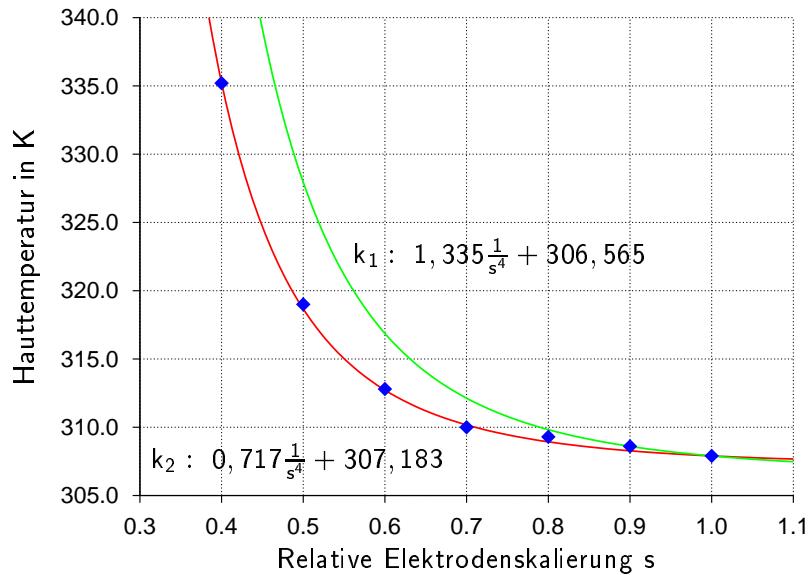
Die angegebenen Formeln zeigen, dass der Innenbereich einer Neutralelektrode recht ineffektiv bei der Stromaufnahme ist und nur einen kleinen Beitrag leistet. Gleichung (8.9) zeigt z. B., dass sich bei einem Stromverhältnis von  $\Delta I = 0,5$  ein Radienverhältnis von  $k_r = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$  ergibt. Dies bedeutet, dass über den Innenkreis einer Elektrode mit einem Radius von  $0,866 \cdot a$  lediglich die Hälfte des Stromes fließt.

#### 8.4.4 Zusammenhang zwischen Stromdichte und Erwärmung

Die Stromdichte und damit die Erwärmung nehmen bei einer Verkleinerung der Elektrode zu. Der Zusammenhang zwischen Erwärmung unter der Neutralelektrode mit dem Quadrat der Stromstärke lässt sich bei konstanter Elektrodenfläche mit Gleichung (4.7) und (8.6) verstehen. Entscheidend ist daher die Abhängigkeit der Stromdichte entweder von der Stromstärke oder von der Elektrodenskalierung.

Ist nach Gleichung (8.6) die Stromstärke konstant und die Elektrodengröße variabel so besteht eine Proportionalität der Stromdichte bezüglich des Quadrates der Elektrodenskalierung. Damit lässt sich mit Gleichung (8.6) ein einfacher Zusammenhang herleiten, der die entstehende Erwärmung am Rand der Elektrode in Abhängigkeit vom Durchmesser der Neutralelektrode annähernd beschreibt.

Die deponierte Energie und damit auch näherungsweise die zu erwartende Erwärmung auf der Hautoberfläche, ist dann proportional zum Quadrat der Stromdichte und damit nach Gleichung (8.6) umgekehrt proportional zur vierten Potenz des Elektrodenradius  $a$ :



**Abbildung 8.20:** Maximale Hauttemperatur nach einer Stromflussdauer von 60 s berechnet mit dem thermodynamischen Algorithmus. Den beiden Ausgleichskurven liegen unterschiedliche Datenmengen zugrunde. Kurve  $k_1$  wurde anhand der Ergebnisse für die Elektrodenskalierungen  $s = 0, 9; 1, 0$  bestimmt. Kurve  $k_2$  wurde für  $s = 0, 4; 1, 0$  bestimmt. Die Ergebnisse zeigen, dass es für die Abschätzung der kleinsten möglichen Skalierung, bei der die Temperaturerhöhung der Haut noch unter den zulässigen maximalen 6 K (hier bei 311 K absolut) liegt, vorteilhaft ist, Berechnungen mit einer kleinen und einer großen Elektrodenskalierung durchzuführen, um dann eine Abschätzung mittels Gleichung (8.11) zu ermitteln. Die beiden Ausgleichsfunktionen liefern als Grenzwerte für  $s$  im ersten Fall  $s = 0, 741$  und im zweiten Fall  $s = 0, 658$ . Die Berechnungen ergaben für eine Skalierung von  $s = 0, 600$  eine maximale Hauttemperatur von 312,8 K und für  $s = 0, 700$  eine Maximaltemperatur von 310,0 K.

$$\Delta T \sim J_0^2 \sim \frac{1}{a^4} \quad (8.10)$$

Somit lässt sich für jedes simulierte Schichtmodell eine einfache Näherungsfunktion für die zu erwartende Erwärmung in Abhängigkeit des Elektrodenradius  $a$  ermitteln:

$$\Delta T = m \cdot \frac{1}{a^4} + c \quad (8.11)$$

Die freien Parameter  $m$  und  $c$  sind unter anderem abhängig von der gewählten Gesamtstromstärke, der Stromflussdauer und der Anfangstemperatur der Haut.

#### 8.4.5 Vergleich mit den numerischen Ergebnissen

Nach Gleichung (8.11) besteht eine Abhängigkeit zwischen der Elektrodengröße und der zu erwartenden Maximaltemperatur. Die Funktionsparameter  $m$  und  $c$  können dabei anhand der numerischen Ergebnisse durch eine Regressionsrechnung bestimmt werden. Abbildung 8.20 zeigt die

Anwendung von Gleichung (8.11) auf die numerischen Ergebnisse aus Tabelle 8.4. Der Elektrodenradius  $a$  in der Näherungsfunktions (8.11) wird im folgenden durch die Elektrodenskalierung  $s$  ersetzt, die eine dimensionslose Größe darstellt. Die Parameter  $m$  und  $c$  der Näherungsfunktion erhalten dadurch die Einheit einer Temperatur. Der Fall  $s = 1,0$  entspricht der Ausgangsgröße der untersuchten Neutralelektrode.

Da die Ausgleichsfunktion nur zwei freie Parameter besitzt, genügen zu deren Bestimmung im Prinzip nur zwei Datenpunkte. Zur Veranschaulichung dieses Zusammenhangs wurden die freien Parameter der beiden Ausgleichskurven jeweils nur anhand von zwei Datenpunkten berechnet. Dabei stellt, wie in Abschnitt 8.3.4 begründet, der Parameter  $c$  in Gleichung (8.11) die Anfangstemperatur der Hautoberfläche dar. Die Regressionsrechnung ergab für diesen Parameter Werte von 306,565 K und 307,183 K. Dies verwundert zunächst, da die Anfangstemperatur der Haut nur 305 K betrug. Der höhere Wert wird durch die zusätzliche Erwärmung der Haut durch die Fett- und Muskelschicht verursacht, da aufgrund der sehr dünnen Haut eine Durchwärmung während des simulierten Zeitintervalls stattgefunden hat.

Die Kurve  $k_1$  in Abbildung 8.20 wurde mit Hilfe der numerischen Ergebnisse für die Skalierungen  $s = 0,9$  und  $s = 1,0$  bestimmt, die verwendeten Skalierungen für die Kurve  $k_2$  waren  $s = 0,4$  und  $s = 1,0$ . Kurve  $k_2$  zeigt dabei eine bessere Approximation der numerischen Ergebnisse über den gesamten untersuchten Skalierungsbereich der Neutralelektrode.

Geht man konservativ von einer maximal zulässigen Erwärmung von 6 K aus, so ergibt sich unter Annahme einer Anfangshauttemperatur von 305 K für die maximale Hauttemperatur ein Grenzwert von 311 K. Dieser Wert wird bei Kurve  $k_2$  bei  $s = 0,658$  erreicht. Beachtet man die zusätzliche Hauerwärmung durch die Fett- und Muskelschicht und nimmt als Anfangstemperatur der Haut einen Wert von 307 K an, so ergibt sich mit einem Grenzwert von 313 K eine Skalierung von  $s = 0,593$ .

#### 8.4.6 Diskussion der Näherungslösung

Die Ergebnisse zeigen, dass es mit Hilfe von Gleichung (8.11) möglich ist, bei geschickter Wahl der Datenpunkte sogar mit nur zwei Werten eine gute Näherungskurve zur Wiedergabe der maximalen Hauttemperaturen bei Verkleinerung der Neutralelektrode zu berechnen. Es zeigte sich, dass die Ergebnisse der Regressionsrechnung die numerischen Werte besser wiedergeben, wenn für die Bestimmung der Parameter  $m$  und  $c$  zwei Datenpunkte gewählt werden, die einen größeren Skalierungsbereich einschließen. Verwendet man für die Bestimmung der Näherungsfunktion alle verfügbaren Datenpunkte so ergeben sich für die Parameter  $m = 0,715$  K und  $c = 307,344$  K Werte, die in guter Übereinstimmung mit den Parametern von Kurve  $k_2$  sind.

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der Zeitersparnis durch die Reduktion der notwendigen numerischen Datenpunkte, da weniger Modelle berechnet werden müssen. Eine sukzessive Annäherung an die zulässige Maximaltemperatur durch wiederholtes Lösen des numerischen Problems erfordert unter Umständen eine große Anzahl an verschiedenen Elektrodenmodellen. Dies lässt sich vereinfachen, wenn wie hier vorgestellt, zunächst zwei sehr unterschiedliche Elektrodengrößen berechnet werden und dann mit einer Ausgleichsfunktion der Grenzwert der Elektrodenskalierung bestimmt wird. Eine weitere Modellrechnung mit der so ermittelten Elektrodenskalierung kann dann zur Validierung der Näherungslösung dienen.

## 8.5 Wissenschaftlicher Beitrag dieser Arbeit

In diesem Kapitel wurde die Anwendung des gekoppelten numerischen thermo-elektrodynamischen Verfahrens an einem Beispiel aus der Elektrochirurgie dargestellt. Im einzelnen wurde die Erwärmung der Hautoberfläche unter der Neutralelektrode bei der monopolen Elektrochirurgie untersucht. Alle Neutralelektroden müssen so konzipiert werden, dass im Betrieb keine Verbrennungen der Haut durch zu hohe Stromdichten an den Elektrodenrändern auftreten.

Im ersten Unterkapitel wurde ein kurzer historischer Abriss über den Verlauf der Neutralelektrodenentwicklung gegeben, aus der sich die Idee einer Neutralelektrode mit Äquipotentialring ergab. Danach wurden die gültigen Teststandards nach der AAMI HF-18 Norm beschrieben, die vor der Markteinführung einer neuen Neutralelektrode in klinischen Studien anzuwenden sind.

Im nächsten Unterkapitel wurden zunächst die mit dem neuen Elektrodendesign durchgeführten klinischen Studien beschrieben anhand derer zehn verschiedene hochauflöste Schichtmodelle eines Oberschenkels eines Erwachsenen für numerische Berechnungen erstellt wurden. Ziel der numerischen Untersuchungen war es, die Ergebnisse der klinischen Studie nachzuvollziehen und zu bestätigen. Es konnte gezeigt werden, dass der Äquipotentialring die maximale Hauttemperatur deutlich senkt und zu einer symmetrischeren Wärmeverteilung auf der Hautoberfläche führt. Weiterhin konnten Zusammenhänge zwischen Hautfeuchtigkeit, Fettschichtdicke und dem Vorhandensein von oberflächlichen Blutgefäßen abgeleitet werden. Der gekoppelte Algorithmus erwies sich der einfachen Abschätzung als überlegen. Die Berücksichtigung der Gewebedurchblutung lieferte weitere Erkenntnisse und verbesserte die numerischen Ergebnisse.

Die gewonnenen Erkenntnisse wurden im weiteren Verlauf dieser Arbeit aufgegriffen und neue Ideen bezüglich einer weiteren Verringerung der Erwärmung numerisch geprüft. Dabei zeigte sich, dass durch eine leitende Verbindung des Neutralringes mit den stromführenden Teilen der Neutralelektrode die entstehende Erwärmung weiter reduzieren kann.

Mit Hilfe der gewonnenen Erkenntnisse wurde im folgenden Unterkapitel die Problematik der Neutralelektroden für Kleinkinder aufgegriffen und anhand von numerischen Modellen die kleinstmögliche Elektrodengröße bestimmt, bei der die von der Norm vorgeschriebenen Temperaturgrenzwerte noch eingehalten wurden. Ausgehend von diesen numerischen Ergebnissen wurde im anschließenden Unterkapitel eine einfache Näherungsformel zur Approximation der maximalen Hauttemperatur abgeleitet, abhängig von der Skalierung der Neutralelektrode. Mit dieser Näherungsformel ist es anhand weniger numerischer Modelle möglich die kleinstmögliche Elektrodengröße abzuschätzen, anstatt zahlreiche sukzessive Simulationsrechnungen bis zum Erreichen der maximal zulässigen Hauterwärmung durchzuführen.

Es wurde gezeigt, dass mit Hilfe der numerischen Feldrechnung zusätzliche Einblicke in die elektrodynamischen Vorgänge im menschlichen Körper gewonnen werden konnten. Mit Hilfe dieser Einblicke ist es in Zukunft möglich in kürzerer Zeit Probleme im Bereich der Neutralelektrodenentwicklung zu lösen und die Patientensicherheit weiter zu optimieren. Die numerische Feldrechnung erweist sich als wertvolle Unterstützung beim Test neuer Elektrodendesigns, da mit ihrer Hilfe in kürzester Zeit neue Designstudien a priori numerisch auf ihre Erwärmungseigenschaften hin untersucht werden können, bevor aufwändige klinische Studien durchgeführt werden. Mit Hilfe der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen und gewonnenen Erkenntnisse ist es daher möglich, die Entwicklungszeit im Bereich der Neutralelektroden zu verkürzen und damit auch die Kosten zu senken. Die Ergebnisse dieses Kapitels wurden bereits auf einer nationalen Konferenz (RAISER ET AL., 2002) und in einem internationalen Journal (GOLOMBECK ET AL., 2003) veröffentlicht.

---

# Kapitel 9

---

## Zusammenfassung und Ausblick

---

### 9.1 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war die Durchführung feldtheoretischer Studien zur Verbesserung der Patientensicherheit bei der Magnetresonanztomographie und der Elektrochirurgie. Beide medizinische Verfahren gehören heutzutage zu den Standardanwendungen in der klinischen Praxis. Durch die direkte Applikation von Strömen in der Elektrochirurgie oder durch die Induktion von Wirbelströmen im menschlichen Körper bei der MR-Tomographie können Stimulationseffekte von Muskel- und Nervengewebe, sowie die Erwärmung von Körnergewebe erzeugt werden. Diese unerwünschten Nebeneffekte können zu irreversiblen gesundheitlichen Schäden, schlimmstenfalls sogar zum Tod des Patienten führen. Der Sicherheit des Patienten bei diesen medizinischen Verfahren muss daher besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden.

Als Alternative zu experimentellen Studien wurden in dieser Arbeit numerische Methoden zur Berechnung elektromagnetischer und thermischer Felder im menschlichen Körper verwendet. Zunächst wurde die Finite-Integrations-Technik als numerisches Verfahren vorgestellt. Es wurde gezeigt, wie mit Hilfe eines gekoppelten elektro-thermodynamischen Verfahrens zunächst die elektrische Feldverteilung im Frequenzbereich in einem Körpermodell berechnet und daraus die deponierte Leistung im Gewebe bestimmt werden kann. Danach wurde gezeigt, wie mit der Biowärmeleitungsgleichung die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung im menschlichen Körper unter Berücksichtigung von Wärmetransport durch Diffusion und Konvektion durch den Blutfluss berechnet werden kann.

Im folgenden Kapitel wurden die dielektrischen Eigenschaften von Körnergewebe diskutiert, da die Kenntnis dieser frequenz- und temperaturabhängigen Größen für eine numerische Modellierung unabdingbar ist. Nach einem historischen Überblick wurden die elementaren physikalischen Größen und Wirkungsmechanismen vorgestellt. Danach wurden mathematische Modelle zur Beschreibung der frequenzabhängigen Eigenschaften von Körnergewebe beschrieben und auf die Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Parameter eingegangen. Die Temperaturabhängigkeit ist streng genommen bei der Berechnung der Erwärmung von Körnergewebe zu berücksichtigen, da sich die dielektrischen Eigenschaften so ändern könnten, dass eine andere elektrische Feldverteilung und damit deponierte Leistung im Gewebe resultiert. Aufgrund fehlender Messdaten in der Literatur musste aber auf eine weitere Betrachtung dieser Problematik verzichtet werden.

Eine wichtige Rolle spielt die Bewertung der numerischen Ergebnisse bezüglich ihrer physiologischen Wirkung im menschlichen Körper. Aus diesem Grund wurde im folgenden Kapitel die biologische Wirkung elektromagnetischer Felder diskutiert. Zunächst wurde eine Unterscheidung und Vorstellung der beiden bekannten Effekte Stimulation und Erwärmung vorgenommen und auf physiologischer Ebene erklärt. Anschliessend daran wurde gezeigt, wie Grenzwerte zum Schutz der Gesundheit für den Menschen abgeleitet werden. Die gängigen Grenzwerte für die arbeitende Bevölkerung und die Allgemeinbevölkerung für elektrische und magnetische Felder, sowie für die Stromdichte und die maximal zulässige Erwärmung im Körper wurden genannt, auch im Bezug auf die klinische Anwendung von MR-Untersuchungen .

Vor der Durchführung gezielter numerischer Untersuchungen war es notwendig, aus den zur Verfügung stehenden numerischen Methoden der Finiten-Integrations-Technik diejenigen auszuwählen, die eine effiziente Lösung der numerischen Probleme ermöglichten. Es hat sich gezeigt, dass für die Berechnung verlustbehafteter Körpergewebe im Frequenzbereich das Jacobi-vorkonditionierte symmetrische biorthogonale konjugierte Gradientenverfahren am besten geeignet ist. Zur Berechnung der zeitlichen Temperaturverteilung ermöglichte das implizite Crank-Nicolson-Verfahren mit einer adaptiven Zeitschrittsteuerung eine effiziente Lösung des Problems.

Im nächsten Kapitel wurde die Erwärmung von Schrittmacherelektroden und Kabeln durch Hochfrequenzpulse von MR-Tomographen untersucht. Zunächst wurden eigene experimentelle Arbeiten mit einem Körperphantom vorgestellt. Danach wurden in einer feldtheoretischen und numerischen Betrachtung die elektrische Feldverteilung und deponierte Leistung in 384 numerischen Modellen eines quaderförmigen Salzwasserphantom mit eingebrachten Kabeln berechnet. Es zeigte sich, dass die numerisch bestimmten Erwärmungen mit Ergebnissen aus der Literatur übereinstimmen. In einer weiteren Betrachtung wurde die Erwärmung an zwei hochaufgelösten numerischen Modellen des menschlichen Körpers berechnet. Dazu wurde zum einen ein Kopfmodell mit Tiefenhirnstimulationselektrode und ein Oberkörpermodell mit Herzschrittmacherelektrode in das HF-Feld eines MR-Tomographen gebracht. Anhand der numerischen Ergebnisse wurde deutlich, dass die Aussagen aus experimentellen Phantomstudien nicht uningeschränkt auf den Menschen übertragen werden können. Die berechneten Erwärmungen der Elektrodenspitzen in den hochaufgelösten Körpermodellen lagen deutlich unter den Werten aus Phantomstudien. Die geringere Erwärmung konnte zum einen auf die Inhomogenität des menschlichen Körpers im Gegensatz zu homogen gefüllten Phantomen und zum anderen auf die gute Wärmeleitung durch die Gewebeperfusion zurückgeführt werden. Insgesamt konnte bei keinem berechneten Modell eine gewebeschädigende Erwärmung nachgewiesen werden. Aufgrund der Ergebnisse wird vermutet, dass für Patienten mit Implantaten weitaus weniger Risiken bestehen, als bisher angenommen. Sicherheitsbestimmungen, die allein aus Phantomexperimenten abgeleitet werden, sind daher in Frage zu stellen.

Neben der Erwärmung durch hochfrequente Felder wurden die Auswirkungen von gepulsten magnetischen Gradientenfeldern im Hinblick auf die mögliche Stimulation von Muskel- und Nervengewebe untersucht. Besondere Aufmerksamkeit wurde dem Herzmuskel gewidmet, da eine unerwünschte Stimulation von Herzgewebe zu Kammerflimmern und Tod des Patienten führen kann. Im niederfrequenten Bereich der MR-Gradienten dürfen daher keine zu großen Stromdichten im Herzmuskel auftreten. Mit Hilfe einer Fourierreihenentwicklung wurden zwei typische Gradientenpulsformen explizit zerlegt, um so die Ströme in einem Körpermodell berechnen zu können. Es konnte gezeigt werden, dass heutige Gradientensysteme in der Lage sind, auch tieferliegende Strukturen wie den Herzmuskel im ungünstigsten Fall zu stimulieren. Mit dem hier vorgestellten Verfahren ist es möglich, beliebige Gradientenpulsformen zu zerlegen und numerisch die Risiken für eine Stimulation von Muskel- und Nervengewebe abzuschätzen.

Bei der Elektrochirurgie spielt die Erwärmung unter der Neutralelektrode eine wichtige Rolle, da es z. B. bei schlechtem Elektrodenkontakt zu Verbrennungen der Haut kommen kann. Es wurde daher ein numerisches Modell konzipiert, mit dem sich die Erwärmung unter Neutralelektroden berechnen lässt. Dabei konnte gezeigt werden, dass durch einen zusätzlichen, nicht konnektierten Außenring eine Reduktion der maximalen Erwärmung der Hautoberfläche erreicht werden konnte. Die Erwärmung konnte noch weiter reduziert werden, indem der Außenring über einen Widerstand mit den stromführenden Teilen der Elektrode verbunden wurde. Ein Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur und einer klinischen Studie bestätigte die numerisch berechneten Erwärmungen. Es zeigte sich, dass mit zunehmender Dicke der Fettschicht und Feuchtigkeit der Haut eine höhere Erwärmung am Elektrodenrand erzeugt wurde. Daneben wurde bei einem Modell mit oberflächennaher Vene eine besonders hohe lokale Temperaturerhöhung festgestellt. Dies stellt auch in der klinischen Anwendung ein Problem dar, welches bislang noch keinen Eingang in die relevanten Normen gefunden hat. Ausgehend von diesen Ergebnissen wurde mit einer theoretischen Abschätzung ein Zusammenhang zwischen Elektrodengröße und maximaler Hauttemperatur abgeleitet, der danach numerisch bestätigt wurde. Mit dieser Abschätzung ist es möglich die minimale Elektrodenfläche zu ermitteln, bei der die nach der Norm zulässigen maximalen Hauttemperaturen noch nicht überschritten werden. Dies eröffnet neue Möglichkeiten der Neutralelektrodenentwicklung insbesondere im Hinblick auf kleinere Kinder- und Babylektroden.

Insgesamt konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, dass es durch geschickte Auswahl und Kombination der zur Verfügung stehenden numerischen Methoden mit hochauflösten Modellen des menschlichen Körpers möglich ist, wichtige Fragestellungen aus der medizinischen Praxis zu beantworten und durch neue Einblicke die Sicherheit für Patienten bei der Magnetresonanztomographie und Elektrochirurgie zu verbessern. Die numerischen Methoden, gekoppelt mit feldtheoretischen Abschätzungen, zeigten sich zum Teil sogar experimentellen Studien durch eine bessere Genauigkeit und durch eine höhere Relevanz der Ergebnisse überlegen. Sie sind damit auf dem Gebiet der Patientensicherheit auch in Zukunft ein unverzichtbares Werkzeug in der Medizintechnik.

## 9.2 Ausblick

Abschließend sollen noch einige Anregungen zur Weiterarbeit gegeben werden.

Wie oben beschrieben, musste aufgrund fehlender Daten auf eine Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Parameter verzichtet werden. Dies kann zu Ungenauigkeiten in den Ergebnissen führen, sobald die Erwärmungen im Gewebe einige Kelvin übersteigen, da sich dann die Änderung der dielektrischen Parameter immer stärker auf die Feldverteilung auswirkt. Es kann daher unter Umständen notwendig werden, die thermodynamische Berechnung nach einiger Zeit zu unterbrechen und mit angepassten Parametern das elektrodynamische Feldproblem erneut zu lösen.

In diesem Zusammenhang kann im Rahmen der thermodynamischen Berechnungen in Zukunft auch eine genauere Betrachtung der Gewebeperfusion notwendig sein. Die in dieser Arbeit angenommenen Perfusionswerte stellen einen Durchschnittswert dar. Bei der Erwärmung von Körpergewebe nimmt in den betroffenen Bereichen aufgrund thermoregulatorischer Massnahmen des Organismus die Durchblutung zu. Diesen Effekten könnte in zukünftigen numerischen Simulationen Rechnung getragen werden.

Im Rahmen einer tierexperimentellen Studie müsste überprüft werden, ob die numerischen Ergebnisse der geringen berechneten Erwärmung von Schrittmacherelektroden in MR-Tomographen in der beschriebenen C-Magnetkonfiguration bestätigt werden können. Denn es besteht, aufgrund der Ergebnisse dieser Arbeit, die berechtigte Hoffnung, dass in Zukunft alle Patienten mit einem Herzschrittmacher bei entsprechender Lagerung ohne Gefahr einer gewebeschädigenden Erwärmung der Elektrodenspitze in einem MR-Tomographen mit C-Magneten untersucht werden können.

Die Berechnung der durch Gradientenfelder induzierten Ströme mit Hilfe einer Fourierreihenzerlegung ist ein funktionierendes, aber sehr aufwändiges numerisches Verfahren. Die Fourierzerlegung war notwendig, da durch restriktive Stabilitätskriterien die Lösbarkeit langsamer transienter Vorgänge im Zeitbereich bisher eingeschränkt war. Die Entwicklung neuer Lösealgorithmen im Zeitbereich könnten hier eine Möglichkeit darstellen, die sich als effiziente Alternative zur Fourierreihenzerlegung erweisen könnte.

Im Bereich der Elektrochirurgie sind aufgrund der numerischen Resultate weitere Modellrechnungen denkbar, bei denen insbesondere der Elektrodenform weitere Aufmerksamkeit zukommt. Das Hinzufügen eines Außenrings um die stromführenden Flächen ergab eine Reduktion der maximalen Erwärmung der Hautoberfläche. Durch eine ohmsche Verbindung des Außenrings mit dem stromführenden Teil der Neutralelektrode konnte eine weitere Verringerung der Erwärmung erzielt werden. Aufgrund dieser Ergebnisse könnten weitere Überlegungen zur Elektrodenform und -aufbau die Anwendungsmöglichkeiten und die Sicherheit in der Elektrochirurgie verbessern. Darüber hinaus wäre es auch denkbar, weitere Operationsszenarien zu modellieren und auch die aktive Elektrode numerisch genauer zu betrachten.

## **Teil III**

## **ANHANG**



---

## Anhang A

---

### Mathematischer Anhang

---

#### A.1 Lösung der allgemeinen Wellengleichung

Dieser Abschnitt zeigt die Lösung der allgemeinen Wellengleichung (6.4) in kartesischen Koordinaten mit einem Produktansatz. Dies ist möglich, da der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten definiert ist als (LEHNER, 1996):

$$\Delta \vec{V} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_z .$$

Dadurch lässt sich die vektorielle Wellengleichung (6.4) in einzelne skalare Gleichungen für die jeweilige  $x$ -,  $y$ -, und  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes aufteilen:

$$\Delta \underline{E}_i = j\omega\mu\sigma \underline{E}_i - \omega^2\mu\varepsilon \underline{E}_i \quad \text{mit } i = x, y, z . \quad (\text{A.1})$$

Die Konstante  $\underline{k}_i^2 = j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon$  wird eingeführt, so dass die rechte Seite dieser Gleichung zusammengefaßt wird:

$$\Delta \underline{E}_i = -\underline{k}_i^2 \cdot \underline{E}_i \quad \text{mit } i = x, y, z . \quad (\text{A.2})$$

Die Konstante  $\underline{k}$  ist komplex. Zunächst soll gezeigt werden, wie diese skalare Differentialgleichung in kartesischen Koordinaten mit einem Produktansatz der Form

$$\underline{E}_i(x, y, z) = \underline{f}_i(x) \cdot \underline{g}_i(y) \cdot \underline{h}_i(z) \quad (\text{A.3})$$

gelöst wird (UNGER, 1988). Dabei werden die elektrischen Feldkomponenten als Produkt aus drei voneinander unabhängigen komplexen Koordinatenfunktionen  $\underline{f}_i(x)$ ,  $\underline{g}_i(y)$  und  $\underline{h}_i(z)$  dargestellt. Einsetzen in Gleichung (A.2) ergibt<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Die Indizes  $i$  werden im folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit unterdrückt.

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} \underline{f} \right) \cdot \underline{g} \cdot \underline{h} + \left( \frac{d^2}{dy^2} \underline{g} \right) \cdot \underline{f} \cdot \underline{h} + \left( \frac{d^2}{dz^2} \underline{h} \right) \cdot \underline{f} \cdot \underline{g} = -\underline{k}^2 \cdot \underline{f} \cdot \underline{g} \cdot \underline{h} .$$

Wenn diese Gleichung durch das Produkt  $\underline{f} \cdot \underline{g} \cdot \underline{h}$  dividiert wird, erhält man folgende Beziehung:

$$\underbrace{\frac{1}{\underline{f}} \cdot \frac{d^2 \underline{f}}{dx^2}}_{=\underline{F}(x)} + \underbrace{\frac{1}{\underline{g}} \cdot \frac{d^2 \underline{g}}{dy^2}}_{=\underline{G}(y)} + \underbrace{\frac{1}{\underline{h}} \cdot \frac{d^2 \underline{h}}{dz^2}}_{=\underline{H}(z)} = -\underline{k}^2 . \quad (\text{A.4})$$

Diese Gleichung gilt für beliebige  $x, y$  und  $z$  nur dann, wenn die Funktionen  $\underline{F}(x), \underline{G}(y)$  und  $\underline{H}(z)$  Konstanten sind. Führt man für die drei Funktionen  $\underline{F}, \underline{G}$  und  $\underline{H}$  die Konstanten  $\underline{k}_x^2, \underline{k}_y^2$  und  $\underline{k}_z^2$  ein, so zerfällt die ursprüngliche partielle Differentialgleichung in drei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{f}} \cdot \frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} &= -\underline{k}_x^2 \\ \frac{1}{\underline{g}} \cdot \frac{d^2 \underline{g}}{dy^2} &= -\underline{k}_y^2 \\ \frac{1}{\underline{h}} \cdot \frac{d^2 \underline{h}}{dz^2} &= -\underline{k}_z^2 . \end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich als Separationsbedingung die Dispersionsbeziehung:

$$\underline{k}_x^2 + \underline{k}_y^2 + \underline{k}_z^2 = \underline{k}^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - j \omega \mu \sigma . \quad (\text{A.5})$$

Die Lösung der ersten Differentialgleichung

$$\frac{1}{\underline{f}} \cdot \frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} = -\underline{k}_x^2$$

erhält man mit dem Ansatz  $\underline{f}(x) = C \cdot e^{\mp j \underline{k}_{x1} x}$  als

$$\underline{f}(x) = C_{x1} \cdot e^{-j \underline{k}_{x1} x} + C_{x2} \cdot e^{j \underline{k}_{x1} x} . \quad (\text{A.6})$$

Setzt man zum Beispiel für  $\underline{k}_x$  den Zusammenhang  $\underline{k}_x = k'_x + j k''_x$  in Gleichung (A.6) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{f}(x) &= C_{x1} \cdot e^{-j(k'_x + j k''_x)x} + C_{x2} \cdot e^{j(k'_x + j k''_x)x} \\ &= C_{x1} \cdot e^{-j k'_x x + k''_x x} + C_{x2} \cdot e^{j k'_x x - k''_x x} \\ &= C_{x1} \cdot e^{-j k'_x x} \cdot e^{k''_x x} + C_{x2} \cdot e^{j k'_x x} \cdot e^{-k''_x x} . \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Berücksichtigt man noch die Zeitabhängigkeit  $e^{j\omega t}$  und bildet den Realteil von Gleichung (A.7) so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Re \{ \underline{f}(x) \} &= \Re \left\{ C_{x1} \cdot e^{-jk'_x x} \cdot e^{k''_x x} \cdot e^{j\omega t} + C_{x2} \cdot e^{jk'_x x} \cdot e^{-k''_x x} \cdot e^{j\omega t} \right\} \\ &= C_{x1} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(-k'_x x) \cdot e^{k''_x x} + C_{x2} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(k'_x x) \cdot e^{-k''_x x} \\ &= \left( C_{x1} \cdot e^{k''_x x} + C_{x2} \cdot e^{-k''_x x} \right) \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(k'_x x) .\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Die Lösung stellt eine ebene Welle in positive und negative  $x$ -Richtung dar, die mit einem Dämpfungsanteil multipliziert wird. Man spricht auch von Abkling- oder evaneszentem Verhalten. Die Konstante  $k'_x$  wird daher Phasenkonstante und  $k''_x$  Dämpfungskonstante genannt.

Der in Abschnitt 6.2.3.2 diskutierte Fall ist auch in dieser Lösung enthalten. Wenn die Separationskonstante  $k_x$  rein reell ist, so verschwindet der Dämpfungsanteil  $e^{\pm k''_x x}$ , da dann  $k''_x = 0$  gilt. Der hier skizzierte Weg gilt auch für alle anderen Koordinaten und Koordinatenfunktionen  $\underline{g}_i(y)$  und  $\underline{h}_i(z)$ .

Bei sehr kleinen Frequenzen  $\omega$  kann der Exponent  $k''_x$  des Dämpfungsterms von Gleichung (A.8) nach Gleichung (6.14) sehr klein werden, so dass sich die dämpfende Exponentialfunktion einer linearen Funktion annähert aufgrund ihrer Reihenentwicklung bei Vernachlässigung höherer Ordnungen:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

In diesem Fall fällt das elektrische Feld in einem leitenden Medium linear ab, wenn im gesamten betrachteten Gebiet  $k''_x x \ll 1$  und damit auch nach Gleichung (6.18)  $k'_x x \ll 1$  gilt, analog auch für  $k''_y$  und  $k''_z$ .

Bei höheren Frequenzen bewirkt die Exponentialfunktion eine starke Dämpfung des elektrischen Feldes und einen exponentiellen Abfall im Inneren des leitfähigen Mediums. Der proportional zum elektrischen Feld laufende Strom  $\vec{J}$  wird mehr und mehr nach außen gedrängt. Dieses Phänomen ist allgemein als Skineffekt bekannt (KÜPFMÜLLER & KOHN, 2000).

Die Ansätze für  $\underline{g}_i(y)$  und  $\underline{h}_i(z)$  erfolgen analog. So erhält man als Lösung für das elektrische Feld aus dem Produktansatz (A.3) unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit eine Kombination aus allen einzelnen Vektorkomponenten

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \left( \begin{array}{l} [C_{x1} \cdot e^{-jk_{x1} x} + C_{x2} \cdot e^{jk_{x1} x}] \cdot \left[ C_{y1} \cdot e^{-jk_{y1} y} + C_{y2} \cdot e^{jk_{y1} y} \right] \\ [C_{x3} \cdot e^{-jk_{x2} x} + C_{x4} \cdot e^{jk_{x2} x}] \cdot \left[ C_{y3} \cdot e^{-jk_{y2} y} + C_{y4} \cdot e^{jk_{y2} y} \right] \\ [C_{x5} \cdot e^{-jk_{x3} x} + C_{x6} \cdot e^{jk_{x3} x}] \cdot \left[ C_{y5} \cdot e^{-jk_{y3} y} + C_{y6} \cdot e^{jk_{y3} y} \right] \\ \cdot [C_{z1} \cdot e^{-jk_{z1} z} + C_{z2} \cdot e^{jk_{z1} z}] \\ \cdot [C_{z3} \cdot e^{-jk_{z2} z} + C_{z4} \cdot e^{jk_{z2} z}] \\ \cdot [C_{z5} \cdot e^{-jk_{z3} z} + C_{z6} \cdot e^{jk_{z3} z}] \end{array} \right) \cdot e^{j\omega t} .\quad (\text{A.9})$$

Alle Konstanten dieser Lösung sind beliebig wählbar und oft durch Randbedingungen des betrachteten Problems festgelegt. Darüber hinaus können die Lösungen prinzipiell linear superponiert werden und sind dann immer noch Lösungen der Wellengleichung (A.2), solange die Dispersionsbeziehung (A.5) erfüllt wird. Oft ergeben sich aber durch die jeweiligen Randbedingungen des betrachteten Problems weitere Einschränkungen oder Vereinfachungen, wie im folgenden diskutiert wird.

Bei der Angabe dieser Lösung wurde auf die Betrachtung von Reflexionen an Materialgrenzen und den damit verbundenen Auswirkungen auf die Lösungsfunktion verzichtet. Vernachlässigt man Reflexionen und nimmt eine freie Ausbreitung in einem unendlich großen Medium an, so ist der Wellenzahlvektor  $\vec{k}_i$  einer Komponente des elektrischen Feldes  $\underline{E}_i$  parallel zu einer der drei Raumrichtungen (LEHNER, 1996). Dadurch vereinfacht sich die Dispersionsbeziehung (A.5), da sich die beiden anderen Komponenten des Vektors  $\vec{k}_i$  zu Null ergeben und die entsprechende Komponente  $k_i$  durch die Gleichungen (6.13) und (6.14) eindeutig bestimmt ist. Die Lösung (A.9) stellt dann eine gedämpfte ebene Welle dar. Man nennt diese Welle auch *homogene Welle*. In diesem besonderen Fall stellt Gleichung (A.9) auch die allgemeine Lösung des Feldproblems dar, da durch die vorgegebenen dielektrischen Parameter und die Feldfrequenz der Wellenzahlvektor eindeutig festgelegt wird (LEHNER, 1996).

Werden die Reflexionen an Materialgrenzen oder Rändern berücksichtigt, ist der Wellenzahlvektor  $\vec{k}_i$  einer Komponente des elektrischen Feldes in der Regel nicht mehr parallel zu einer ausgezeichneten Raumrichtung. Die Komponenten des Wellenzahlvektors  $\vec{k}_i$  einer Komponente des elektrischen Feldes  $\underline{E}_i$  sind durch die Dispersionsbeziehung (A.5) nicht mehr eindeutig bestimmt. Daraus ergeben sich die *inhomogene Wellen*, die nicht mehr transversal und damit keine ebenen Wellen sind. Auf eine weiterführende Diskussion wird hier verzichtet. Stattdessen sei hier auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen (LEHNER, 1996).

## A.2 Der Absolutbetrag der komplexen Amplitude

Gegeben sei eine beliebige Lösungsfunktion (A.7) der Wellengleichung. Der Betrag dieser komplexen Funktion ergibt sich nach Gleichung (2.25). Zunächst werden der Real- und Imaginärteil voneinander getrennt:

$$\underline{f}(x) = C_{x1} \cdot e^{-jk'_x x} \cdot e^{k''_x x} + C_{x2} \cdot e^{jk'_x x} \cdot e^{-k''_x x} \quad (\text{A.10})$$

$$= C_{x1} (\cos(k'_x x) - j \sin(k'_x x)) e^{k''_x x} + C_{x2} (\cos(k'_x x) + j \sin(k'_x x)) e^{-k''_x x} \quad (\text{A.11})$$

$$= (C_{x1} e^{k''_x x} + C_{x2} e^{-k''_x x}) \cos(k'_x x) + j (C_{x2} e^{-k''_x x} - C_{x1} e^{k''_x x}) \sin(k'_x x) . \quad (\text{A.12})$$

Die Quadrate des Real- und Imaginärteiles ergeben sich zu:

$$\Re^2 \{\underline{f}(x)\} = (C_{x1}^2 e^{2k''_x x} + 2C_{x1}C_{x2} + C_{x2}^2 e^{-2k''_x x}) \cos^2 k'_x x \quad (\text{A.13})$$

$$\Im^2 \{\underline{f}(x)\} = (C_{x1}^2 e^{2k''_x x} - 2C_{x1}C_{x2} + C_{x2}^2 e^{-2k''_x x}) \sin^2 k'_x x . \quad (\text{A.14})$$

Die Summe der Quadrate ergibt schließlich:

$$\Re^2 \{\underline{f}(x)\} + \Im^2 \{\underline{f}(x)\} = C_{x1}^2 e^{2k''_x x} + C_{x2}^2 e^{-2k''_x x} + 2C_{x1}C_{x2} (\cos^2 k'_x x - \sin^2 k'_x x) . \quad (\text{A.15})$$

Danach ist nur noch die Wurzel zu ziehen. Diese Gleichung kann noch durch das Kosinusadditionstheorem  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$  (BRONŠTEJN & SEMENDJAEV, 1991) vereinfacht werden und man erhält:

$$|\underline{f}(x)| = \sqrt{C_{x1}^2 e^{2k''_x x} + C_{x2}^2 e^{-2k''_x x} + 2C_{x1}C_{x2} \cos(2k'_x x)} . \quad (\text{A.16})$$

Diese Gleichung vereinfacht sich noch weiter, wenn für die Konstanten  $C$  bei symmetrischer Problemgeometrie gilt  $C_{x1} = -C_{x2}$ . Dann können die Exponentialfunktionen zu einer hyperbolischen Kosinusfunktion zusammengefasst werden:

$$|\underline{f}(x)| = C_{x1} \cdot \sqrt{2 \cosh 2k''_x x + 2 \cos(2k'_x x)} . \quad (\text{A.17})$$

### A.3 Die Fourierreihenentwicklung von Gradientenpulsen

Jede periodische Funktion kann in eine unendliche Reihe trigonometrischer Funktionen der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (\text{A.18})$$

entwickelt werden (BRONŠTEJN & SEMENDJAEV, 1991). Ebenso kann jede periodische Funktion in der Zeit mit der Periodendauer  $T$  in eine Fourierreihe entwickelt werden. Mit dem Zusammenhang  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ergibt sich folgende Reihenentwicklung:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) . \quad (\text{A.19})$$

Die Koeffizienten der Reihenentwicklung sind gegeben durch:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt , \quad (\text{A.20})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt , \quad (\text{A.21})$$

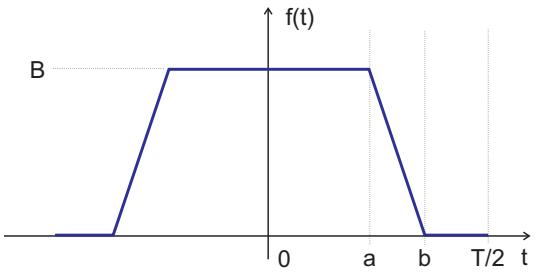
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt . \quad (\text{A.22})$$

Um eine periodische Funktion in eine Fourierreihe zu entwickeln, ist es in erster Linie notwendig, die Integrale in den Gleichungen (A.20), (A.21) und (A.22) zu lösen. Um die Ursprungsfunktion zufriedenstellend wiedergeben zu können, reicht es im Allgemeinen aus, anstatt unendlich vieler Koeffizienten nur eine begrenzte Anzahl Harmonischer zu berücksichtigen. Die Auswahl der Harmonischen ergibt sich immer aus der betrachteten Problemstellung.

Bei der Reihenentwicklung ergeben sich für gerade und ungerade Funktionen weitere Vereinfachungen. Bei geraden Funktionen sind alle Koeffizienten  $b_n$  gleich Null, und es ergibt sich eine reine Kosinusreihe. Bei ungeraden Funktionen sind die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_n$  gleich Null, und es ergibt sich eine reine Sinusreihe. Der Koeffizient  $a_0$  stellt den frequenzunabhängigen Gleichanteil der betrachteten Funktion dar, der bei ungeraden und damit zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen verschwindet.

Für zahlreiche periodische Funktionen existieren bereits tabellierte Angaben in der Literatur (BRONŠTEJN & SEMENDJAEV, 1991). Die Fourierreihen der hier betrachteten Gradientenpulsformen konnten dort aber nicht gefunden werden, so dass eine explizite Ableitung der Reihenentwicklung notwendig war. Im folgenden Abschnitt wird zunächst für den einfachen trapezförmigen Gradient die Fourierreihenentwicklung abgeleitet. Danach wird die Fourierreihe für den doppelten Trapezgradientenpuls entwickelt.

**Abbildung A.1:** Schemazeichnung einer einfachen trapezförmigen Gradientenpulsform. Der zeitliche Verlauf der Pulsform wurde so gewählt, dass die gesamte Pulsform achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse ist und damit eine gerade Funktion darstellt, was die Fourierreihenentwicklung vereinfacht.



### A.3.1 Fourierreihe des einfachen trapezförmigen Gradientenpulses

Abbildung A.1 zeigt eine komplette Periode eines einfachen trapezförmigen Gradientenpulses mit der Periodendauer  $T$  und der maximalen Amplitude  $B$ . In Abhängigkeit der weiteren charakteristischen Zeitpunkte  $a$  und  $b$  muss der Gradientenpuls zunächst in eine abschnittsweise definierte Funktion zerlegt werden, um die Integrale der Fourierkoeffizienten  $a_0$ ,  $a_n$  und  $b_n$  stückweise lösen zu können. Nach Abbildung A.1 ergibt sich für eine Periode für  $f(t)$  folgender Zusammenhang:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} \leq t \leq -b \\ \frac{B}{b-a} \cdot (t+b) & -b < t < -a \\ B & -a \leq t \leq a \\ \frac{B}{a-b} \cdot (t-b) & a < t < b \\ 0 & b \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}. \quad (\text{A.23})$$

Aus den fünf einzelnen Teilfunktionen ergibt sich für den Koeffizienten  $a_0$  nach Gleichung (A.20):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left( \frac{B}{b-a} \int_{-b}^{-a} (t+b) dt + B \int_{-a}^a dt + \frac{B}{a-b} \int_a^b (t-b) dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \left( \frac{B}{b-a} \left( t^2/2 + bt \right) \Big|_{-b}^{-a} + B(t) \Big|_{-a}^a - \frac{B}{a-b} \left( t^2/2 - bt \right) \Big|_a^b \right) \\ &= \frac{2}{T} \left( \frac{B}{b-a} \left( a^2/2 - ab + b^2/2 \right) + 2Ba - \frac{B}{b-a} \left( -b^2/2 - a^2/2 + ab \right) \right) \\ &= \frac{2B}{(b-a) \cdot T} \cdot (b^2 - a^2) \\ &= \frac{2B}{(b-a) \cdot T} \cdot (b+a) \cdot (b-a) \\ &= \frac{2B \cdot (b+a)}{T}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Die Koeffizienten  $a_n$  werden nach Gleichung (A.21) berechnet. Von den fünf aus den Teilstücken resultierenden Teilintegralen bleiben nur die drei übrig, die sich nicht zu Null ergeben. Für die Koeffizienten  $a_n$  ergibt sich demnach:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \quad (\text{A.25})$$

$$= \frac{2}{T} \left( \underbrace{\frac{B}{b-a} \int_{-b}^{-a} (t+b) \cdot \cos(n\omega t) dt}_{\text{I}} + B \underbrace{\int_{-a}^a \cos(n\omega t) dt}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{B}{a-b} \int_a^b (t-b) \cdot \cos(n\omega t) dt}_{\text{III}} \right).$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit empfiehlt es sich an dieser Stelle die Integralsumme (A.25) in die Teile I, II und III aufzuspalten und jedes Integral getrennt zu lösen. Für das Teilintegral I ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{-a} (t+b) \cdot \cos(n\omega t) dt &= \int_{-b}^{-a} t \cdot \cos(n\omega t) dt + b \int_{-b}^{-a} \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{n\omega} \left( \frac{1}{n\omega} \cos(n\omega t) + t \sin(n\omega t) \right) \Big|_{-b}^{-a} + \frac{b}{n\omega} (\sin(n\omega t)) \Big|_{-b}^{-a} \\ &= \frac{1}{n\omega} \left( \frac{\cos(-n\omega a)}{n\omega} - a \sin(-n\omega a) - \frac{\cos(-n\omega b)}{n\omega} + b \sin(-n\omega b) \right) \\ &\quad + \frac{b}{n\omega} (\sin(-n\omega a) - \sin(-n\omega b)) \\ &= \frac{1}{n\omega} \left( \frac{\cos(n\omega a) - \cos(n\omega b)}{n\omega} + (a-b) \sin(n\omega a) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Das Teilintegral II ist einfach zu integrieren und ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \cos(n\omega t) dt &= \frac{1}{n\omega} \cdot (\sin(n\omega t)) \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{2}{n\omega} \cdot \sin(n\omega a). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Das Teilintegral III ist in seiner Struktur dem Teilintegral I sehr ähnlich. Bei der Berechnung müssen die unterschiedlichen Integrationsgrenzen und die Differenz  $(t-b)$  vor dem Kosinusterm berücksichtigt werden, was einen Vorzeichenwechsel verursacht. Danach ergibt sich das Teilintegral III ähnlich zu Teilintegral I zu:

$$\begin{aligned} \int_a^b (t-b) \cdot \cos(n\omega t) dt &= \int_a^b t \cdot \cos(n\omega t) dt - b \int_a^b \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{n\omega} \left( \frac{\cos(n\omega b) - \cos(n\omega a)}{n\omega} - (a-b) \sin(n\omega a) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Aus den drei Teillösungen lassen sich jetzt die Koeffizienten  $a_n$  zusammensetzen. Dabei sind die jeweiligen Vorfaktoren  $B/(b-a)$ ,  $B$  und  $B/(a-b)$  der Integrale zu berücksichtigen, was bei

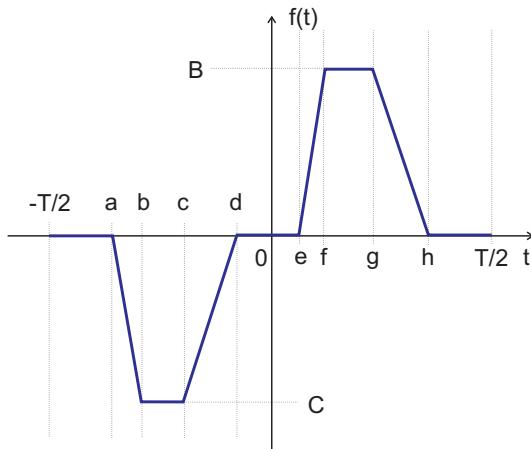
Teilintegral III zu einem weiteren Vorzeichenwechsel führt. Für die Koeffizienten  $a_n$  ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2B}{(b-a) \cdot T} \cdot \frac{1}{n\omega} \left( \frac{\cos(n\omega a) - \cos(n\omega b)}{n\omega} + (a-b) \sin(n\omega a) + 2(b-a) \sin(n\omega a) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(n\omega b) - \cos(n\omega a)}{n\omega} + (a-b) \sin(n\omega a) \right) \\ &= \frac{B \cdot T}{(b-a) \cdot \pi^2} \cdot \frac{\cos(n\omega a) - \cos(n\omega b)}{n^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Die Koeffizienten  $b_n$  sind gleich Null, da in dem hier betrachteten Fall einer achsensymmetrischen Rampe die Funktion  $f(t)$  gerade ist. Für die stückweise definierte Funktion  $f(t)$  (A.23) ergibt sich unter Kombination von (A.24) und (A.29) folgende Reihenentwicklung:

$$f(t) = \frac{B \cdot (b+a)}{T} + \frac{B \cdot T}{(b-a) \cdot \pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cos(n\omega a) - \cos(n\omega b)}{n^2} \cdot \cos(n\omega t) \right). \quad (\text{A.30})$$

**Abbildung A.2:** Schemazeichnung einer doppelten trapezförmigen Gradientenpulsform. Im allgemeinen Fall ist die Pulsform nicht symmetrisch zum Ursprung, wenn die Amplitudenwerte  $B$  und  $C$  unterschiedlich sind oder die Zeitpunkte  $a$  und  $h$ , oder  $b$  und  $g$ , oder  $c$  und  $f$ , oder  $d$  und  $e$  asymmetrisch bezüglich der Entfernung zur  $y$ -Achse sind. Die Fourierreihenentwicklung wird in diesem allgemeinen Fall kompliziert, erlaubt aber die Darstellung komplexer Gradientenpulsformen.



### A.3.2 Fourierreihe des doppelten Trapezgradientenpulses

Abbildung A.2 zeigt eine komplettete Periode eines komplexen, asymmetrischen, doppelten und trapezförmigen Gradientenpulses mit der Periodendauer  $T$  und den maximalen Amplituden  $B$  und  $C$ . In Abhängigkeit der frei wählbaren Zeitpunkte  $a$  bis  $h$  muss der Gradientenpuls zunächst wiederum in eine abschnittsweise definierte Funktion zerlegt werden, um die Integrale der Fourierkoeffizienten  $a_0$ ,  $a_n$  und  $b_n$  stückweise lösen zu können. Nach Abbildung A.2 ergibt sich für eine Periode für  $f(t)$  folgender Zusammenhang:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} \leq t \leq a \\ \frac{C}{b-a} \cdot (t-a) & a < t < b \\ C & b \leq t \leq c \\ \frac{C}{c-d} \cdot (t-d) & c < t < d \\ 0 & d \leq t \leq e \\ \frac{B}{f-e} \cdot (t-e) & e < t < f \\ B & f \leq t \leq g \\ \frac{B}{g-h} \cdot (t-h) & g < t < h \\ 0 & h \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}. \quad (\text{A.31})$$

Durch die freie Wahl der Zeitpunkte  $a$  bis  $h$  ist die Funktion im allgemeinen nicht symmetrisch zum Ursprung, wodurch sich die Fourierreihe zunächst nicht vereinfachen lässt, indem Symmetrien ausgenutzt werden. Daher werden im folgenden zunächst die allgemeinen Formeln für die Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_n$  und  $b_n$  abgeleitet, bevor am Ende ein Spezialfall eines zum Ursprung symmetrischen Gradienten betrachtet wird und gezeigt wird, wie dann die allgemeinen Koeffizientenformeln vereinfacht werden können.

Aus den neun einzelnen Teilfunktionen ergibt sich für den Koeffizienten  $a_0$  nach Gleichung (A.20) analog zur Berechnung in Gleichung (A.24)<sup>2</sup>:

<sup>2</sup>Da die zu lösenden Integrale von der Struktur denen in Gleichung (A.24) entsprechen, wurden zur besseren Übersichtlichkeit einige Zwischenschritte bei der Ableitung von Gleichung (A.32) weggelassen. Der Lösungsweg der auftretenden Integrale entspricht denen in Gleichung (A.24).

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\
&= \frac{2}{T} \left( \frac{C}{b-a} \int_a^b (t-a) dt + C \int_b^c dt + \frac{C}{c-d} \int_c^d (t-d) dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{f-e} \int_e^f (t-e) dt + B \int_f^g dt + \frac{B}{g-h} \int_g^h (t-h) dt \right) \\
&= \frac{C \cdot (b-a)}{2} + C \cdot (c-b) + \frac{C \cdot (d-c)}{2} + \frac{B \cdot (f-e)}{2} + B \cdot (g-f) + \frac{B \cdot (h-g)}{2} \\
&= \frac{1}{T} \cdot (C \cdot (-a-b+c+d) + B \cdot (-e-f+g+h)) . \tag{A.32}
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $a_n$  werden auch bei diesem Beispiel nach Gleichung (A.21) berechnet. Von den neun aus den Teilfunktionen resultierenden Teilintegralen bleiben nur die sechs übrig, die sich nicht zu Null ergeben. Die Form der Integrale gleicht wieder den Integralen in Gleichung (A.25). Für die Koeffizienten  $a_n$  ergibt sich demnach:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \tag{A.33} \\
&= \frac{2}{T} \left( \underbrace{\frac{C}{b-a} \int_a^b (t-a) \cdot \cos(n\omega t) dt}_{\text{I}} + \underbrace{C \int_b^c \cos(n\omega t) dt}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{C}{c-d} \int_c^d (t-d) \cdot \cos(n\omega t) dt}_{\text{III}} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{B}{f-e} \int_e^f (t-e) \cdot \cos(n\omega t) dt}_{\text{IV}} + \underbrace{B \int_f^g \cos(n\omega t) dt}_{\text{V}} + \underbrace{\frac{B}{g-h} \int_g^h (t-h) \cdot \cos(n\omega t) dt}_{\text{VI}} \right) .
\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall empfiehlt es sich an dieser Stelle die Integralsumme (A.33) in die Teile I, II, III, IV, V und VI aufzuspalten und jedes Integral getrennt zu lösen. Die Teilintegrale ähneln in ihrer Form den in den Gleichungen (A.26) und (A.27) bereits gelösten Integralen. Die Lösungen können daher leicht von den Gleichungen (A.26) und (A.27) abgeleitet werden. Für das Teilintegral I ergibt sich demnach:

$$\int_a^b (t-a) \cdot \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{n\omega} \left( \frac{\cos(n\omega b) - \cos(n\omega a)}{n\omega} + (b-a) \sin(n\omega b) \right) . \tag{A.34}$$

Analog dazu ergeben sich für die Teilintegrale III, IV und VI:

$$\int_c^d (t-d) \cdot \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{n\omega} \left( \frac{\cos(n\omega d) - \cos(n\omega c)}{n\omega} + (d-c) \sin(n\omega c) \right), \quad (\text{A.35})$$

$$\int_e^f (t-e) \cdot \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{n\omega} \left( \frac{\cos(n\omega f) - \cos(n\omega e)}{n\omega} + (f-e) \sin(n\omega f) \right), \quad (\text{A.36})$$

$$\int_g^h (t-h) \cdot \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{n\omega} \left( \frac{\cos(n\omega h) - \cos(n\omega g)}{n\omega} + (h-g) \sin(n\omega g) \right). \quad (\text{A.37})$$

Für die Teilintegrale II und V können ebenfalls einfach die Lösungen angegeben werden, unter Berücksichtigung der bereits abgeleiteten Lösung für das in seiner Struktur ähnliche Integral in Gleichung (A.27):

$$\int_b^c \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{n\omega} (\sin(n\omega c) - \sin(n\omega b)) \quad (\text{A.38})$$

$$\int_f^g \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{n\omega} (\sin(n\omega g) - \sin(n\omega f)). \quad (\text{A.39})$$

Kombiniert man die einzelnen Teillösungen miteinander, so ergibt sich die allgemeine Lösung für die Koeffizienten  $a_n$ :

$$\begin{aligned} a_n = & \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \cdot \left( \frac{C}{b-a} \cdot \left[ \frac{\cos(n\omega b) - \cos(n\omega a)}{n\omega} + (b-a) \cdot \sin(n\omega b) \right] \right. \\ & + C \cdot [\sin(n\omega c) - \sin(n\omega b)] \\ & + \frac{C}{c-d} \cdot \left[ \frac{\cos(n\omega d) - \cos(n\omega c)}{n\omega} + (d-c) \cdot \sin(n\omega c) \right] \\ & + \frac{B}{f-e} \cdot \left[ \frac{\cos(n\omega f) - \cos(n\omega e)}{n\omega} + (f-e) \cdot \sin(n\omega f) \right] \\ & + B \cdot [\sin(n\omega g) - \sin(n\omega f)] \\ & \left. + \frac{B}{g-h} \cdot \left[ \frac{\cos(n\omega h) - \cos(n\omega g)}{n\omega} + (h-g) \cdot \sin(n\omega g) \right] \right). \quad (\text{A.40}) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $b_n$  werden analog zu den Koeffizienten  $a_n$  berechnet gemäß Gleichung (A.22). Es ergibt sich wiederum eine Integralsumme aus sechs Teilintegralen, die getrennt berechnet werden können:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt \\
&= \frac{2}{T} \left( \underbrace{\frac{C}{b-a} \int_a^b (t-a) \cdot \sin(n\omega t) dt}_{\text{I}} + C \underbrace{\int_b^c \sin(n\omega t) dt}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{C}{c-d} \int_c^d (t-d) \cdot \sin(n\omega t) dt}_{\text{III}} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{B}{f-e} \int_e^f (t-e) \cdot \sin(n\omega t) dt}_{\text{IV}} + B \underbrace{\int_f^g \sin(n\omega t) dt}_{\text{V}} + \underbrace{\frac{B}{g-h} \int_g^h (t-h) \cdot \sin(n\omega t) dt}_{\text{VI}} \right).
\end{aligned} \tag{A.41}$$

Der einzige Unterschied zwischen den Gleichungen (A.33) und (A.41) besteht darin, dass anstatt der Kosinusfunktionen nun Sinusfunktionen in den Integralen auftauchen. Es sind daher Teilintegrale der Form  $\int (t \cdot \sin(n\omega t)) dt$  und  $\int \sin(n\omega t) dt$  zu lösen. Nach BRONŠTEJN UND SEMENDJAEV (1991) ergeben sich die Lösungen dieser Integrale zu:

$$\int (t \cdot \sin(n\omega t)) dt = \frac{\sin(n\omega t)}{n^2\omega^2} - \frac{t \cdot \cos(n\omega t)}{n\omega} + k, \tag{A.42}$$

$$\int \sin(n\omega t) dt = -\frac{1}{n\omega} \cos(n\omega t) + k. \tag{A.43}$$

Vergleicht man die Lösung des Integrals (A.42) mit der Struktur der Gleichung (A.34) so erkennt man, dass sich die Teilintegrale I, III, IV und VI aus Gleichung (A.41) durch den Vergleich von Gleichung (A.42) mit Gleichung (A.34) leicht lösen lassen, wenn man die Sinus- und Kosinusfunktionen miteinander vertauscht und dabei die Vorzeichenwechsel beachtet. Die Teilintegrale I, III, IV und VI der Koeffizienten  $b_n$  können somit aus den bereits berechneten Lösungen der Teilintegrale der Koeffizienten  $a_n$  abgeleitet werden. Dies gilt auch für die Teilintegrale II und V. Eine aufwändige rechnerische Ableitung, die zum gleichen Ergebnis führen würde, kann somit an dieser Stelle entfallen. Stattdessen wird direkt die allgemeine Lösung für die Koeffizienten  $b_n$  angegeben, die in ihrer Struktur der allgemeinen Lösung (A.40) der Koeffizienten  $a_n$  ähnlich ist:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \cdot \left( \frac{C}{b-a} \cdot \left[ \frac{\sin(n\omega b) - \sin(n\omega a)}{n\omega} + (a-b) \cdot \cos(n\omega b) \right] \right. \\
&\quad + C \cdot [\cos(n\omega b) - \cos(n\omega c)] \\
&\quad + \frac{C}{c-d} \cdot \left[ \frac{\sin(n\omega d) - \sin(n\omega c)}{n\omega} + (c-d) \cdot \cos(n\omega c) \right] \\
&\quad + \frac{B}{f-e} \cdot \left[ \frac{\sin(n\omega f) - \sin(n\omega e)}{n\omega} + (e-f) \cdot \cos(n\omega f) \right] \\
&\quad + B \cdot [\cos(n\omega f) - \cos(n\omega g)] \\
&\quad \left. + \frac{B}{g-h} \cdot \left[ \frac{\sin(n\omega h) - \sin(n\omega g)}{n\omega} + (g-h) \cdot \cos(n\omega g) \right] \right). \tag{A.44}
\end{aligned}$$

Für die stückweise definierte Funktion  $f(t)$  (A.31) ergibt sich unter Kombination von (A.32), (A.40) und (A.44) die zugehörige Fourierreihenentwicklung auf deren expliziten Angabe hier aufgrund der Größe der einzelnen Komponenten verzichtet wird. Stattdessen wird der weiter oben genannte Spezialfall eines zum Ursprung symmetrischen Gradientenpulses analog der in Abschnitt 7.2 beschriebenen Pulsform betrachtet.

Im Fall eines symmetrischen Gradientenpulses sei  $C = -B$ ,  $d = e = 0$ ,  $c = -f$ ,  $b = -g$  und  $a = -h$  (vgl. Abbildung 7.3). In diesem Fall ergibt sich nach Gleichung (A.32):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \cdot (-B \cdot (h + g - f) + B(-f + g + h)) \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Der Koeffizient  $a_0$  verschwindet, da die Pulsform bei der hier angenommenen symmetrischen Form über keinen Gleichanteil verfügt. Da die Funktion ungerade ist, müssen die Koeffizienten  $a_n$  ebenfalls verschwinden. Dies kann mit Gleichung (A.40) unter Einsetzen der Koeffizientenabhängigkeiten gezeigt werden:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \cdot \left( \underbrace{\frac{B}{g-h} \cdot \left[ \underbrace{\frac{\cos(n\omega g) - \cos(n\omega h)}{n\omega}}_{\hat{=}+I} + (g-h) \cdot \sin(n\omega g) \right]}_{\hat{=}+II} \right. \\ &\quad \underbrace{- B \cdot [\sin(n\omega g) - \sin(n\omega f)]}_{\hat{=}+III} \\ &\quad \underbrace{+ \frac{B}{f} \cdot \left[ \underbrace{\frac{-\cos(n\omega f)}{n\omega}}_{\hat{=}+IV} - f \cdot \sin(n\omega f) \right]}_{\hat{=}+V} \\ &\quad \underbrace{+ \frac{B}{f} \cdot \left[ \underbrace{\frac{\cos(n\omega f)}{n\omega}}_{\hat{=}+VI} + f \cdot \sin(n\omega f) \right]}_{\hat{=}+VII} \\ &\quad \underbrace{+ B \cdot [\sin(n\omega g) - \sin(n\omega f)]}_{\hat{=}+VIII} \\ &\quad \left. \underbrace{+ \frac{B}{g-h} \cdot \left[ \underbrace{\frac{\cos(n\omega h) - \cos(n\omega g)}{n\omega}}_{\hat{=}+IX} + (h-g) \cdot \sin(n\omega g) \right]}_{\hat{=}+X} \right) \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Die Koeffizienten  $b_n$  ergeben sich durch Einsetzen der Koeffizientenabhängigkeiten in Gleichung (A.44). Analog zu Gleichung (A.46) ergeben sich einige Vereinfachungen, da manche Terme wegfallen und andere zusammengefasst werden können:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \cdot \left( \underbrace{\frac{-B}{h-g} \cdot \left[ \frac{-\sin(n\omega g) + \sin(n\omega h)}{n\omega} + (g-h) \cdot \cos(n\omega g) \right]}_{\hat{=}+I} \right. \\
&\quad \underbrace{- B \cdot [\cos(n\omega g) - \cos(n\omega f)]}_{\hat{=}+II} \\
&\quad \underbrace{+ \frac{-B}{-f} \cdot \left[ \frac{\sin(n\omega f)}{n\omega} - f \cdot \cos(n\omega f) \right]}_{\hat{=}+III} \\
&\quad \underbrace{+ \frac{B}{f} \cdot \left[ \frac{\sin(n\omega f)}{n\omega} - f \cdot \cos(n\omega f) \right]}_{\hat{=}+III} \\
&\quad \left. \underbrace{+ B \cdot [\cos(n\omega f) - \cos(n\omega g)]}_{\hat{=}+II} \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{g-h} \cdot \left[ \frac{\sin(n\omega h) - \sin(n\omega g)}{n\omega} + (g-h) \cdot \cos(n\omega g) \right] \right) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \cdot \left( \underbrace{2B \cdot \left[ \frac{\sin(n\omega h) - \sin(n\omega g)}{n\omega \cdot (g-h)} + \cos(n\omega g) \right]}_{\hat{=}2 \cdot I} \right. \\
&\quad \underbrace{+ 2B \cdot [\cos(n\omega f) - \cos(n\omega g)]}_{\hat{=}2 \cdot II} \\
&\quad \left. + 2B \cdot \left[ \frac{\sin(n\omega f)}{n\omega \cdot f} - \cos(n\omega f) \right] \right) \\
&= \frac{4B}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \cdot \left( \frac{\sin(n\omega h) - \sin(n\omega g)}{n\omega \cdot (g-h)} + \frac{\sin(n\omega f)}{n\omega \cdot f} \right. \\
&\quad \left. + \cos(n\omega g) + \cos(n\omega f) - \cos(n\omega g) - \cos(n\omega f) \right) \\
&= \frac{4B}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega^2} \cdot \left( \frac{\sin(n\omega h) - \sin(n\omega g)}{g-h} + \frac{\sin(n\omega f)}{f} \right) \\
&= \frac{B \cdot T}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{\sin(n\omega h) - \sin(n\omega g)}{g-h} + \frac{\sin(n\omega f)}{f} \right). \tag{A.47}
\end{aligned}$$

Für die stückweise definierte Funktion  $f(t)$  (A.31) ergibt sich mit Gleichung (A.47) schließlich folgende Reihenentwicklung im Falle der punktsymmetrischen, doppelten und trapezförmigen Gradientenpulsform:

$$f(t) = \frac{B \cdot T}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\sin(n\omega h) - \sin(n\omega g)}{n^2 \cdot (g - h)} + \frac{\sin(n\omega f)}{n^2 \cdot f} \right) \cdot \sin(n\omega t) \right]. \quad (\text{A.48})$$

---

## Anhang B

---

### Übersichtstabellen

---

Nummer	Name	Dichte $\rho$ in kg/m <sup>3</sup>	Spez. Wärme $c_s$ in J/(kg · K)	Wärmeleitf. $\lambda$ in W/(K · m)	Perfusion in ml/(kg · min)
1	Knochenmark	1 810	1 256	0,220	
2	Fett	920	2 973	0,250	28
3	Knochen	1 810	1 256	0,360	
4	Weisse Substanz	1 040	3 664	0,503	560
5	Graue Substanz	1 040	3 664	0,565	560
6	Haut, trocken	1 010	3 662	0,293	120
7	Haut, feucht	1 010	3 662	0,293	120
8	Auge	1 170	3 664	0,594	
9	Muskel	1 040	3 639	0,500	38
10	Blut	1 060	3 894	0,530	
11	CSF	1 010	4 182	0,598	
12	Nervengewebe	1 040	3 664	0,500	
13	Linse	1 100	3 664	0,400	
14	Nervus Opticus	1 040	3 664	0,500	
15	Knorpel	1 100	3 664	0,495	
16	Lunge	260	3 664	0,425	400
17	Darm	1 041	3 664	0,556	850
18	Niere	1 050	3 890	0,535	3 750
19	Leber	1 050	3 600	0,490	1 050
20	Drüsengewebe	1 050	3 664	0,500	
21	Milz	1 054	3 720	0,539	1 200
22	Magen	1 050	3 664	0,525	400
23	Pankreas	1 045	3 664	0,441	600
24	Herzmuskel	1 060	3 639	0,527	900
25	Luft	1,29	1,01	0,026	
26	Aluminium	2 702	896	220,0	
27	Hydrogel	1 010	4 182	0,600	
28	Platin-Iridium	21 570	130	31,0	
29	PTFE	2 150	1 010	0,160	

**Tabelle B.1:** Physikalische Gewebe- und Materialparameter die zur Lösung des thermodynamischen Problems verwendet wurden nach DUCK (1990); GAUTHERIE (1990); KUCHLING (1991); LEGGET UND WILLIAMS (1991). Die Tabelle weist Lücken auf, da nicht für alle Materialien Perfusionswerte in der Literatur verfügbar sind.

---

Nummer	Name	8,25 MHz		42,6 MHz	
		Permitt. $\epsilon_r$	Leitfähigk. $\sigma$ in S/m	Permitt. $\epsilon_r$	Leitfähigk. $\sigma$ in S/m
1	Knochenmark	58,96	0,120	19,83	0,149
2	Fett	32,30	0,051	15,13	0,064
3	Knochen	79,57	0,119	35,10	0,152
4	Weisse Substanz	190,50	0,149	82,94	0,261
5	Graue Substanz	357,45	0,271	121,92	0,466
6	Haut, trocken	417,14	0,172	119,11	0,386
7	Haut, feucht	258,32	0,355	91,01	0,458
8	Auge	248,14	0,789	85,82	0,864
9	Muskel	198,01	0,607	80,89	0,672
10	Blut	341,08	1,083	100,56	1,184
11	CSF	108,72	2,002	102,81	2,035
12	Nervengewebe	178,83	0,215	65,31	0,290
13	Linse	103,87	0,217	57,50	0,270
14	Nervus Opticus	178,83	0,215	65,31	0,290
15	Knorpel	211,58	0,360	72,87	0,433
16	Lunge	146,93	0,218	44,64	0,275
17	Darm	315,21	0,475	111,86	0,603
18	Niere	429,62	0,487	145,21	0,684
19	Leber	256,30	0,305	95,59	0,415
20	Drüsengewebe	188,87	0,713	81,16	0,765
21	Milz	527,54	0,477	138,68	0,693
22	Magen	295,65	0,772	97,49	0,859
23	Pankreas	188,87	0,713	81,16	0,765
24	Herzmuskel	336,56	0,486	126,71	0,634

**Tabelle B.2:** Dielektrische Gewebeparameter für 8,25 MHz und 42,6 MHz, die zur Lösung des elektrodynamischen Problems verwendet wurden nach GABRIEL ET AL. (1996A); GABRIEL ET AL. (1996B); GABRIEL ET AL. (1996C).

Nummer	Name	63,9 MHz		127,8 MHz	
		Permitt. $\epsilon_r$	Leitfähigk. $\sigma$ in S/m	Permitt. $\epsilon_r$	Leitfähigk. $\sigma$ in S/m
1	Knochenmark	16,44	0,154	13,54	0,162
2	Fett	13,65	0,066	12,37	0,070
3	Knochen	30,88	0,161	26,29	0,180
4	Weiße Substanz	67,88	0,291	52,56	0,342
5	Graue Substanz	97,49	0,511	73,55	0,587
6	Haut, trocken	92,25	0,436	65,48	0,523
7	Haut, feucht	76,77	0,488	61,61	0,544
8	Auge	75,33	0,883	65,01	0,918
9	Muskel	72,26	0,688	63,51	0,719
10	Blut	86,49	1,207	73,18	1,249
11	CSF	97,34	2,066	84,07	2,143
12	Nervengewebe	55,09	0,312	44,08	0,354
13	Linse	50,36	0,286	42,80	0,313
14	Nervus Opticus	55,09	0,312	44,08	0,354
15	Knorpel	62,94	0,452	52,94	0,488
16	Lunge	37,12	0,289	29,48	0,316
17	Darm	94,71	0,638	76,6-	0,705
18	Niere	118,65	0,741	89,67	0,852
19	Leber	80,61	0,448	64,28	0,511
20	Drüsengewebe	73,97	0,778	66,79	0,804
21	Milz	110,65	0,744	82,94	0,835
22	Magen	85,85	0,878	74,91	0,913
23	Pankreas	73,97	0,778	66,79	0,804
24	Herzmuskel	106,58	0,678	84,30	0,766

**Tabelle B.3:** Dielektrische Gewebeparameter für 63,9 MHz und 127,8 MHz, die zur Lösung des elektrodynamischen Problems verwendet wurden nach GABRIEL ET AL. (1996A); GABRIEL ET AL. (1996B); GABRIEL ET AL. (1996C).

---

Nummer	Name	Permitt. $\epsilon_r$	Leitfähigk. $\sigma$ in S/m
2	Fett	62	0,044
6	Haut, trocken	1 083	0,003
7	Haut, feucht	5 160	0,157
9	Muskel	4 755	0,418
10	Blut	4 572	0,727
25	Luft	1,0	0
26	Aluminium	1,0	$\infty$
27	Hydrogel	1 350	0,150
28	Platin-Iridium	1,0	$3,125 \cdot 10^6$
29	PTFE	2,1	$1 \cdot 10^{-16}$

**Tabelle B.4:** Dielektrische Gewebeparameter für 350 kHz, die zur Lösung des elektrodynamischen Neutralialektrodenproblems notwendig sind nach GABRIEL ET AL. (1996A); GABRIEL ET AL. (1996B); GABRIEL ET AL. (1996C); KUCHLING (1991). Weiterhin sind die dielektrischen Parameter für die übrigen verwendeten Materialien mit angegeben worden. Diese Werte werden als konstant über den gesamten Frequenzbereich betrachtet. Die Nummerierung der Gewebe und Materialien richtet sich nach Tabelle B.1.



# Symbolverzeichnis

Bei den gewählten Bezeichnungen und mathematischen Symbole werden die im folgenden erläuterten Konventionen verwandt:

- Symbole für reelle oder komplexe Zahlen sind griechische Buchstaben oder kursiv gedruckte lateinische Buchstaben, z. B.  $x$ ,  $\omega$ .
- Komplexe Größen und Funktionen werden durch einen Unterstrich gekennzeichnet, z. B.  $\underline{k}$ . Konjugiert komplexe Größen werden zusätzlich durch einen hochgestellten Stern gekennzeichnet, z. B.  $\underline{\sigma}^*$ .
- Real- und Imaginärteil komplexer Größen werden mit Hochkommata gekennzeichnet. Der Realteil erhält ein Hochkomma, der Imaginärteil zwei, z. B.  $\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon'_r - j\varepsilon''_r$ .
- $\Re\{\underline{k}\}$  ist der Realteil von  $\underline{k}$  und  $\Im\{\underline{k}\}$  der Imaginärteil.
- Matrizen sind durch fettgedruckte Großbuchstaben hervorgehoben, z. B. **C**. Spaltenvektoren werden ebenfalls fettgedruckt und zusätzlich durch einen Pfeil gekennzeichnet, z. B.  $\vec{e}$ . Dreidimensionale vektorielle Größen werden durch kursive lateinische Buchstaben dargestellt, z. B.  $\vec{E}$ .
- Die Indizierung von Skalaren und Vektorkomponenten im Sinne einer Nummerierung erfolgt durch kursiv gedruckte Kleinbuchstaben oder ganze Zahlen, z. B.  $x_i$ ,  $x_0$ . Als Symbolbezeichner kommen ebenfalls ganze Zahlen oder griechische Kleinbuchstaben in Betracht. Daüber hinaus werden auch nicht kursiv gedruckte lateinische Buchstaben verwendet, z. B.  $\omega_0$ ,  $t_{\max}$ .
- Eine partielle Zeitableitung ist durch einen über das Symbol gesetzten Punkt gekennzeichnet, z. B.  $\dot{\mathbf{b}} \equiv \partial \mathbf{b} / \partial t$
- Ist **A** eine Matrix, so bezeichnet  $\mathbf{A}^T$  die transponierte Matrix und  $\mathbf{A}^{-1}$  die inverse Matrix.
- Größen auf dem dualen Gitter  $\tilde{\mathcal{G}}$  werden mit einer Tilde gekennzeichnet, z. B.  $\tilde{\mathbf{C}}$ .

In den folgenden Tabellen werden alle Symbole in der Reihenfolge ihres ersten Auftretens in dieser Arbeit aufgeführt. Ein Symbol wird nur dann noch einmal aufgeführt, wenn es im entsprechenden Kapitel eine andere als die bereits vorgestellte Bedeutung hat.

## Allgemein

$x, y, z$	Ortskoordinaten
$f(x, y, z)$	Ortsfunktion
$t$	Zeit
$f(t)$	Zeitfunktion
$j$	imaginäre Einheit
$O$	Ordnung (Landau-Symbol)
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\ \vec{\mathbf{x}}\ $	euklidische Norm eines Vektors
$\ \vec{\mathbf{x}}\ _\infty$	Maximumnorm eines Vektors
$\ \mathbf{A}\ $	beliebige Matrixnorm
$\ \mathbf{A}\ _2$	Spektralnorm einer Matrix
$\mathcal{G}$	Gitterraum
$\tilde{\mathcal{G}}$	dualer Gitterraum
$\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}$	diskreter Rotationsoperator (auf $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}$ )
$\mathbf{S}, \tilde{\mathbf{S}}$	diskreter Divergenzoperator (auf $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}$ )
$-\tilde{\mathbf{S}}^T, -\mathbf{S}^T$	diskreter Gradientenoperator (auf $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}$ )
$\Delta$	Gitterschrittweite
$i, n$	Indexgrößen, z. B. zur Nummerierung von Gitterzellen

---

## Elektromagnetische Felder - Kapitel 2

$\vec{\nabla}$	Nabla-Operator
$\vec{E}$	elektrische Feldstärke
$\vec{D}$	elektrische Verschiebungsdichte
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke
$\vec{B}$	magnetische Flussdichte
$\vec{J}$	elektrische Stromdichte
$\vec{J}_e$	eingeprägte elektrische Stromdichte
$\rho_e$	elektrische Raumladungsdichte
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante
$\epsilon_r$	relative Permittivität
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante
$\mu_r$	Permeabilität
$\sigma$	elektrische Leitfähigkeit
$\sigma_s$	statische Ionenleitfähigkeit von Gewebe
$\omega$	Kreisfrequenz
$\varphi$	Phasenwinkel
$\vec{b}$	Vektor der magnetischen Flüsse
$\vec{e}$	Vektor der elektrischen Spannungen
$\vec{h}$	Vektor der magnetischen Spannungen
$\vec{d}$	Vektor der elektrischen Flüsse
$\vec{j}$	Vektor der elektrischen Ströme
$\vec{j}_e$	Vektor der eingeprägten elektrischen Ströme
$\vec{q}_e$	Vektor der elektrischen Ladungen
$\Phi$	Vektor der elektrischen Potentiale
$\mathbf{M}_\epsilon$	Operator zur Verknüpfung von $\vec{d}$ und $\vec{e}$
$\mathbf{M}_\mu$	Operator zur Verknüpfung von $\vec{b}$ und $\vec{h}$
$\mathbf{M}_\kappa$	Operator zur Verknüpfung von $\vec{j}$ und $\vec{e}$
$\mathbf{D}_\epsilon$	Näherungsmatrix des Operators $\mathbf{M}_\epsilon$ (Permittivitätsmatrix)
$\mathbf{D}_\mu$	Näherungsmatrix des Operators $\mathbf{M}_\mu$ (Permeabilitätsmatrix)
$\mathbf{D}_\kappa$	Näherungsmatrix des Operators $\mathbf{M}_\kappa$ (Leitfähigkeitsmatrix)
$\mathbf{D}_s$	Matrix mit den Kantenlängen der Gitterzellen
$\mathbf{D}_A$	Matrix mit den Flächeninhalten der Gitterzellen

## Instationäre Wärmeleitung - Kapitel 2

$T$	Temperatur
$T_B$	Bluttemperatur
$\rho$	Dichte
$\rho_B$	Dichte des Blutes
$c_s$	spezifische Wärmekapazität
$c_B$	spezifische Wärmekapazität des Blutes
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit
$w_B$	Gewebeperfusion
$k_B$	Zusammenfassung von Durchblutungseigenschaften
$q_{HF}$	absorbierte Leistungsdichte
$q_M$	generierte Leistungsdichte durch metabolische Prozesse
$Q$	Gesamtwärmeleistungsdichte
$Q_n$	Wärmeleistungsdichte in der $n$ -ten Gitterzelle
$\vec{J}_w$	Wärmestromdichte
$J_{n,i}$	$i$ -ter Wärmestrom in oder aus der $n$ -ten Gitterzelle
$T_n$	Temperatur der $n$ -ten Gitterzelle
$k_{B,n}$	Blutkonstante der $n$ -ten Gitterzelle
$\vec{t}$	Vektor der Temperaturen
$\vec{j}_w$	Vektor der Wärmeströme
$\vec{q}$	Vektor der Wärmequellen
$\mathbf{D}_m$	Matrix mit den Dichten und Wärmekapazitäten
$\mathbf{D}_\lambda$	Matrix mit den Wärmeleitfähigkeiten
$\mathbf{D}_B$	Matrix mit den Bluteigenschaften
$\mathbf{D}_A$	Matrix mit den Flächeninhalten der Gitterzellen
$\mathbf{D}_V$	Matrix mit den Volumina der Gitterzellen
$\mathbf{A}$	Matrix: $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{D}_\lambda \cdot \tilde{\mathbf{S}}^T$
$\mathbf{B}$	Iterationsmatrix des Zeitintegrationsverfahrens
$\varrho(\mathbf{B})$	Spektralradius der Matrix $\mathbf{B}$
$\chi(\mathbf{B})$	Konditionszahl der Matrix $\mathbf{B}$
$\Delta t$	Zeitschrittweite
$\Delta t_n$	Länge des $n$ -ten Zeitschrittes
$\Delta t_{\max}$	maximale stabile Zeitschrittweite
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Gitterschrittweiten in $x$ -, $y$ - und $z$ -Richtung
$\gamma$	skalare Konstante
$k$	skalare Konstante

---

## Gekoppelte Probleme - Kapitel 2

$\bar{P}_n$	mittlere Verlustleistung in der $n$ -ten Gitterzelle
$\bar{E}_{\text{Am}}$	Mittelwert des elektrischen Feldes
$\Delta V_n$	Volumen der $n$ -ten Gitterzelle
$q_{n,\text{HF}}$	Verlustleistungsdichte in der $n$ -ten Gitterzelle

## Dielektrische Eigenschaften von Körpergewebe - Kapitel 3

$\vec{J}_g$	Gesamtstromdichte durch biologisches Gewebe
$P$	Polarisation
$P_{\text{Or}}$	Orientierungspolarisation
$P_S$	Polarisation in einem statischen Feld
$P_\infty$	instantane Orientierungspolarisation
$\tau$	Relaxationszeit
$\varepsilon'_{r\infty}$	relative Gewebepermittivität bei unendlich hoher Frequenz
$\varepsilon'_{rS}$	relative Gewebepermittivität bei sehr kleinen Frequenzen
$\sigma_{\text{eff}}$	effektive Leitfähigkeit
$\alpha$	empirischer skalarer Verteilungsparameter
$\varepsilon'_{rS,n}$	relative Gewebepermittivität des $n$ -ten Dispersionstermes
$\tau_n$	Relaxationszeit des $n$ -ten Dispersionstermes
$\alpha_n$	empirischer skalarer Verteilungsparameter des $n$ -ten Dispersionstermes

## Biologische Wirkung elektromagnetischer Felder - Kapitel 4

$t_p$	Dauer eines Stimulus, Pulsdauer
$t_r$	Refraktärzeit einer erregbaren Zelle
$\tau$	Membranzeitkonstante
$b$	Rheobase
$I$	Stromstärke
$T$	Periodendauer
$f$	Frequenz
$\Delta V$	infinitesimales Volumen
$P_E$	komplexe elektrische Leistung
$E_{\text{abs}}$	Absolutbetrag des elektrischen Feldes
$P_W$	Wirkleistung
$SAR$	spezifische Absorptionsrate
$\Delta T$	Temperaturerhöhung
$t_{\text{ww}}$	Wechselwirkungszeit

## Numerische Voruntersuchungen - Kapitel 5

<b>A, B, H</b>	Matrizen
$\vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}$	Spaltenvektoren
<b>K<sub>1</sub>, K<sub>2</sub>, D</b>	Diagonalmatrizen
<b>E, F</b>	Dreiecksmatrizen
$\omega_1, \omega_2$	skalare Relaxationsparameter
$\vec{r}_k$	Residuum im $k$ -ten Iterationsschritt
$\vec{e}_k$	Fehlervektor im $k$ -ten Iterationsschritt
$\vec{r}_0$	Initiales Residuum
$\vec{e}_0$	Initialer Fehlervektor
$\vec{x}$	exakter Lösungsvektor
$\vec{x}_k$	Lösungsvektor im $k$ -ten Iterationsschritt
$\eta$	Spektralkondition
$\xi$	Maß für die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung
$T_0$	Anfangstemperatur
$T_U$	Umgebungstemperatur
$R$	Kugelradius
$a$	Temperaturleitfähigkeit
$Bi$	Biot-Zahl
$C, \delta$	Konstanten, abhängig von der Biot-Zahl $Bi$
$\bar{P}$	mittlere Leistung
$P_0$	Pulsleistung
$t_i$	Pulsintervalldauer
$W_i$	deponierte Energie pro Pulsintervall
$\bar{W}$	deponierte Energie durch die mittlere Leistung $\bar{P}$

---

## Magnetische Hochfrequenzfelder bei der MR-Tomographie - Kapitel 6

$\omega_l$	Präzessionswinkelgeschwindigkeit
$f_l$	Larmor-Frequenz
$B_0$	statische magnetische Grundfeldstärke
$B_1$	Feldstärke des transversalen HF-Pulses
$\gamma$	gyromagnetisches Verhältnis
$\alpha$	Flipwinkel
$t_p$	HF-Pulsdauer
$f_i(x), g_i(y), h_i(z)$	Ortsfunktionen
$\varphi_i$	Phasenwinkel
$\Delta$	Laplace-Operator
$k$	komplexe Separationskonstante
$\varepsilon$	Permittivität
$\mu$	Permeabilität
$\sigma$	Leitfähigkeit
$\vec{k}$	Wellenzahlvektor
$k_i$	Komponenten des Wellenzahlvektors
$x_0, y_0, z_0$	Dimensionen des Salzwasserphantoms
$C_i, k'_i, k''_i$	Konstanten
$\vec{E}_{Am_A}, \vec{E}_{Am_B}$	komplexe elektrische Teilamplituden
$\vec{E}_{Am_{A/B}, i}$	Beträge der Komponenten der elektrischen Teilamplituden
$E_{x, Am_B}$	x-Komponente einer elektrischen Teilamplitude
$\underline{E}_i$	Komponenten der komplexen elektrischen Feldamplitude
$E_i$	Komponenten der reellen elektrischen Feldamplitude
$A_{x,n}$	Amplitudenkonstanten
$\lambda$	Wellenlänge
$c_0$	Lichtgeschwindigkeit

### Magnetische Gradientenfelder - Kapitel 7 / Anhang A

$G_i, G_i^n$	Komponenten des magnetischen Feldgradienten
$\mathbf{G}$	magnetischer Feldgradient
$\varphi_p$	Phasendrehwinkel
$a_0, a_n, b_n$	Fourierkoeffizienten
$T$	Gradientenpulsdauer
$B, C$	Maximalamplituden der Gradientenpulsformen
$a, b, c, d, e, f, g, h$	Zeitpunkte der Gradientenrampenfunktionen
$g_i$	Gewichtsfaktoren
$J_{\max, \text{abs}}$	Maximalwert der Stromdichte
$J_{\max}(t)$	Zeitfunktion der Stromdichte

### Optimierung von Neutralenlektroden in der Elektrochirurgie - Kapitel 8

$V$	elektrisches Potential
$J_0(kr)$	Besselfunktion nullter Ordnung
$A(k)$	Amplitudenfunktion
$k$	Längenparameter
$a$	Elektrodenradius
$b$	Elektrodeninnenkreisradius
$r$	Koordinate für den Elektrodenradius
$J_0$	mittlere Stromdichte
$I_0$	Gesamtstrom
$\Delta I$	Strom durch einen Teilbereich der Elektrode
$k_r$	Radienverhältnis
$\Delta T$	Erwärmung
$m, c$	Konstanten
$s$	Elektrodenskalierung

# Tabellenverzeichnis

2.1	Vergleich der maximalen stabilen Zeitschrittweiten bei der Lösung elektrodynamischer und thermodynamischer Probleme im Zeitbereich . . . . .	32
5.1	Deponierte Leistung im Testmodell . . . . .	76
5.2	Erfüllung der Kontinuitätsgleichung im Testmodell . . . . .	77
5.3	Speicherbedarf der einzelnen Algorithmen . . . . .	78
5.4	Zeitbedarf der einzelnen Algorithmen auf verschiedenen Rechnern . . . . .	80
5.5	Rechenzeitvergleich impliziter und expliziter Algorithmus . . . . .	82
5.6	Rechenzeitvergleich expliziter und impliziter Algorithmus mit adaptiver Zeitschrittsteuerung . . . . .	89
6.1	Variierte Parameter der Kabelphantomstudie . . . . .	112
6.2	Maximale SAR-Werte der Kabelphantomstudie bei Modell 1 . . . . .	118
6.3	Maximale SAR-Werte der Kabelphantomstudie bei Modell 2 . . . . .	119
6.4	Maximale SAR-Werte der Kabelphantomstudie bei Modell 3 . . . . .	120
6.5	Maximale SAR-Werte der Kabelphantomstudie bei Modell 4 . . . . .	121
6.6	Werte für die Konstanten $k'$ und $k''$ . . . . .	125
6.7	Erwärmung an der Kabelspitze bei einer fiktiven MR-Sequenz . . . . .	127
6.8	Erwärmung an der Tiefenhirnstimulationselektrode im Salzwasserphantom . . . . .	132
6.9	Vergleich der absoluten Erwärmung an drei Punkten im Kopfmodell . . . . .	137
6.10	Maximale Leistungsabsorption und Erwärmung an der Spitze der Herzschrittmacherelektrode . . . . .	143
7.1	Parameter der berechneten Gradientenpulsformen . . . . .	158
7.2	Gewichtsfaktoren für die Harmonischen bei der Fourierreihenzerlegung der Gradientenpulsformen . . . . .	159
7.3	Maximalwerte des Absolutbetrages der Stromdichte im Herzmuskel . . . . .	161

7.4 Maximalwerte des Absolutbetrages der Stromdichte im Herzmuskel bei der GRE-Sequenz . . . . .	162
8.1 Gewebedicken und Modellparameter des Oberschenkelschichtmodells . . . . .	173
8.2 Übersicht über die maximalen Hauttemperaturen nach einer Stromflussdauer von 60 s für jedes numerische Modell . . . . .	177
8.3 Gewebedicke und Anfangstemperaturen des Kleinkinderoberschenkelmodells . . .	185
8.4 Gitterknotenpunkte und Ergebnisse des Kleinkinderoberschenkelmodells . . . .	186
B.1 Physikalische Gewebe- und Materialparameter . . . . .	220
B.2 Dielektrische Gewebeparameter für 8,25 MHz und 42,6 MHz . . . . .	221
B.3 Dielektrische Gewebeparameter für 63,9 MHz und 127,8 MHz . . . . .	222
B.4 Dielektrische Gewebeparameter für 350 kHz und Parameter anderer Materialien .	223

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Zeichnung eines kartesischen Gitternetzes . . . . .	9
2.2	Beispiel für die räumliche Diskretisierung eines komplexen inhomogenen Körpermodells . . . . .	10
2.3	Anordnung der unbekannten Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einem kubischen Gitter . . . . .	11
2.4	Anordnung des Gitters und des dualen Gitters bei der Finiten-Integrations-Technik	13
2.5	Anordnung der thermodynamischen Größen im diskreten Gitter . . . . .	22
2.6	Numerische Kopplung des elektrodynamischen und thermodynamischen Lösers .	31
2.7	Modularer Aufbau des Feldrechnungsprogrammes MAFIA . . . . .	34
3.1	Permittivität und effektive Leitfähigkeit einer Kochsalzlösung . . . . .	41
3.2	Dielektrische Eigenschaften von trockener Haut und Muskelgewebe . . . . .	46
3.3	Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Parameter am Beispiel von Muskel- und Nierengewebe . . . . .	47
4.1	Auslösung eines Aktionspotentials durch einen elektrischen Stimulus . . . . .	52
4.2	Beispiel zur Verdeutlichung der Begriffe Chronaxie und Rheobase . . . . .	53
4.3	Zusammenhang zwischen Stromstärke und Frequenz zur Erzeugung einer Stimulation mit Wechselstrom . . . . .	54
4.4	Basisgrenzwerte für den Effektivwert der Stromdichte . . . . .	60
4.5	Referenzwerte für das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte . . . . .	62
5.1	Einfaches Körpermodell für die Analyse des Konvergenzverhaltens des Frequenzbereichslösers W3 . . . . .	68
5.2	Konvergenzgeschwindigkeit des COCGSSOR-, PSBCGR- und PQMR-Algorithmus bei verschiedenen Frequenzen . . . . .	75
5.3	Einfaches numerisches Modell eine Stahlkugel im Wärmebad . . . . .	82
5.4	Abkühlungsvorgang einer Stahlkugel . . . . .	83

5.5 Vergleich der thermodynamischen Lösungen mit der analytischen Näherungslösung am Beispiel einer Stahlkugel . . . . .	84
5.6 Abweichung der thermodynamischen Lösungen von der analytischen Näherungslösung am Beispiel einer Stahlkugel . . . . .	85
5.7 Vergleich der Temperaturverläufe des impliziten Verfahrens mit konstantem und adaptivem Zeitschritt . . . . .	87
5.8 Zunahme des Zeitschrittes durch die adaptive Zeitschrittsteuerung. . . . .	88
5.9 Pulspausenverhältnis bei gepulster Leistung . . . . .	90
5.10 Vergleich zwischen den Temperaturverläufen bei gepulster Leistung . . . . .	91
6.1 Plexiglasphantom mit Stimulationselektroden im MR-Tomographen . . . . .	97
6.2 Temperaturkurven an einer Hirn- und Herzschrittmacherelektrode bei der MR-Tomographie . . . . .	98
6.3 Schemazeichnung des Salzwasserphantoms im MR-Tomographen . . . . .	105
6.4 Unterschiedliche Kabellagen im Salzwasserphantom . . . . .	111
6.5 Spezifische Absorptionsrate an der Kabelspitze bei Modell 1 . . . . .	114
6.6 Spezifische Absorptionsrate an der Kabelspitze bei Modell 2 . . . . .	115
6.7 Spezifische Absorptionsrate an der Kabelspitze bei Modell 3 . . . . .	116
6.8 Spezifische Absorptionsrate an der Kabelspitze bei Modell 4 . . . . .	117
6.9 Spezifische Absorptionsrate im Schnitt durch Modell 1 im R-Magneten . . . . .	122
6.10 Spezifische Absorptionsrate im Schnitt durch Modell 1 im C-Magneten . . . . .	123
6.11 Vergleich der spezifischen Absorptionsrate zwischen spitzem und flachem Kabelende bei Modell 2 . . . . .	124
6.12 Stromdichte am spitzen und flachen Kabelende . . . . .	125
6.13 Vergleich des Absolutbetrags der Amplitude des elektrischen Feldes im Salzwasserphantom mit der Näherungslösung . . . . .	126
6.14 Absolutbetrag der elektrischen Feldstärke abhängig vom Abstand zum Ursprung	127
6.15 Abhängigkeit des Absolutbetrags der Amplitude des elektrischen Feldes im Salzwasserphantom von der Leitfähigkeit der Salzlösung . . . . .	127
6.16 Erwärmung der Kabelspitze während einer MR-Sequenz . . . . .	128
6.17 Temperaturverteilung an der Kabelspitze von Modell 1 bei verschiedenen Frequenzen . . . . .	128
6.18 Vergleich der Kabelerwärmung zwischen numerischen und experimentellen Ergebnissen . . . . .	129
6.19 Numerisches Modell eines kugelförmigen Salzwasserphantoms . . . . .	131
6.20 Stromdichtewirbel im Phantom ohne und mit inliegendem Kabel . . . . .	133

---

---

6.21	MR-Aufnahme eines Kopfes mit Tiefenhirnstimulationselektrode . . . . .	135
6.22	Numerisches Kopfmodell mit implantierter Tiefenhirnstimulationselektrode . . . . .	137
6.23	Zeitlicher Verlauf der Erwärmung im hochauflöstem Kopfmodell . . . . .	138
6.24	Vergleich der Erwärmungsmuster im hochauflöstem Kopfmodell zwischen der Schlimmsten-Falls-Abschätzung und dem thermodynamischen Algorithmus . . . . .	139
6.25	3D-Darstellung der Erwärmung im Kopfmodell nach 18,24 s HF-Einstrahlung . .	140
6.26	Erwärmung an der einfachen Elektrodenspitze im Kopfmodell nach 18,24 s HF-Einstrahlung . . . . .	141
6.27	Numerisches Oberkörpermodell mit implantiertem Herzschrittmacher . . . . .	142
6.28	Absolutbetrag einzelner Komponenten des elektrischen Feldes bei der MR-Tomographie im menschlichen Körper . . . . .	143
6.29	Erwärmung an der Spitze der Herzschrittmacherelektrode . . . . .	144
6.30	Erwärmung an der Herzschrittmacherelektrode mit und ohne Gewebeperfusion .	145
6.31	Wirbelstromwege im menschlichen Körper bei verschiedenen statischen Grundfeldrichtungen . . . . .	146
7.1	Gradientenspulenaufbau in $x$ - und $z$ -Richtung . . . . .	151
7.2	Fourierzerlegung einer Rampenfunktion . . . . .	154
7.3	Fourierzerlegung einer Doppelrampenfunktion . . . . .	155
7.4	Gradientenspulensystem mit Oberkörpermodell . . . . .	156
7.5	Verlauf der magnetischen Flussdichte entlang der $z$ -Achse . . . . .	157
7.6	Rekonstruktion des zeitlichen Verlaufes der Stromdichte im Herzmuskel . . . .	163
7.7	Maximale Stromdichte im Herzmuskel . . . . .	164
8.1	Ursprüngliche Anwendung der monopolaren Elektrochirurgie . . . . .	166
8.2	Technische Zeichnung der Neutralelektrode mit Äquipotentialring . . . . .	167
8.3	Experimentelles Vorgehen beim Test einer neuen Neutralelektrode . . . . .	168
8.4	Wärmebildaufnahmen der Erwärmungsmuster auf der Hautoberfläche von zwei Probanden bei Tests nach der AAMI HF-18-Norm . . . . .	169
8.5	Schnittbild des Oberschenkels des Visible Man Datensatzes . . . . .	171
8.6	Numerisches Oberschenkelmodell mit Neutralelektrode und aktiver Elektrode .	172
8.7	Maximaltemperatur auf der Hautoberfläche der Oberschenkelmodelle nach einer Stromflussdauer von 60 s . . . . .	175
8.8	Erwärmung auf der Hautoberfläche ohne Gewebeperfusion . . . . .	178
8.9	Erwärmung auf der Hautoberfläche mit Gewebeperfusion . . . . .	179

---

8.10 Vergleich der Temperaturverteilungen auf der Hautoberfläche von Modell 2 unter Berücksichtigung der Gewebeperfusion . . . . .	180
8.11 Vergleich der Temperaturverteilungen auf der Hautoberfläche von Modell 5 unter Berücksichtigung der Gewebeperfusion . . . . .	181
8.12 Abnahme der maximalen Erwärmung durch Konnektierung des Neutralringes . .	182
8.13 Temperaturentwicklung an einzelnen Punkten zu Beginn des Stromflusses . . .	184
8.14 Geometrie der Neutralelektrode bei unterschiedlichen Skalierungen . . . . .	185
8.15 Anwendung der Näherungslösung für Kinderneutralelektroden . . . . .	187
8.16 Erwärmung der Hautoberfläche bei Verkleinerung der Neutralelektrodenfläche .	188
8.17 Querschnitt durch die zylinderförmige Neutralelektrodengeometrie . . . . .	190
8.18 Schemazeichnung der Neutralelektrode . . . . .	191
8.19 Stromdichte und Stromstärke von kreisförmigen Neutralelektroden . . . . .	193
8.20 Anwendung der Näherungslösung bei Kleinkinderneutralelektroden . . . . .	194
A.1 Einfache trapezförmige Gradientenpulsform . . . . .	209
A.2 Doppelte trapezförmige Gradientenpulsform . . . . .	212

# Literaturverzeichnis

- AAMI (2001). *ANSI - AAMI HF-18* (Wissenschaftlicher Bericht). Association for the Advancement of Medical Instrumentation.
- AXELSSON, O. (1996). *Iterative Solution Methods*. Cambridge, CB2 IRP: Cambridge University Press.
- BATTIG, C. G. (1968). Electrosurgical burn injuries and their prevention. *JAMA*, 204, 1025–1029.
- BECKER, U., DOHLUS, M., DU, X., GUTSCHLING, S., KLATT, R., LANGSTROF, A., PRÖPPER, T., v. RIENEN, U., SCHMITT, D., STEFFEN, B., THOMA, P., WAGNER, B., WEILAND, T., WIPF, S., WOLTER, H. & ZHANG, M. (1994). Die Gitter-Maxwellgleichungen, Theorie und Anwendungsspektrum. *Kleinheubacher Berichte*, 37, 721–738.
- BEITZ, W. & KÜTTNER, K. H. (1995). *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*. Berlin, Deutschland: Springer-Verlag.
- BETHGE, K. (1996). *Kernphysik*. Heidelberg: Springer.
- BIELER, M. (2000). *Erwärmung von Herzschrittmacherelektroden im RF-Feld eines MR-Scanners* (Diplomarbeit). Eidgenössisch Technische Hochschule, Zürich.
- BLAIR, H. A. (1932). On the intensity-time relations for stimulation by electric currents. *J. Gen. Physiol.*, 15, 177–185.
- BOSSERT, T. (1999). Sicherheit von Personen mit Herzschrittmachern in elektromagnetischen Feldern. *Newsletter Forschungsgemeinschaft Funk*, 7-2, 1–5.
- BOWMAN, H. F. (1981). Heat transfer and thermal dosimetry. *Journal of Microwave Power*, 16, 121–133.
- BOWTELL, R. & BOWLEY, R. M. (2000). Analytic Calculations of the E-Fields Induced by Time-Varying Magnetic Fields Generated by Cylindrical Gradient Coils. *Magnetic Resonance in Medicine*, 44, 782–790.
- BRONŠTEJN, I. N. & SEMENDJAEV, K. A. (1991). *Taschenbuch der Mathematik*. Stuttgart; Leipzig: B. G. Teubner.
- CHARNY, K. C. & LEVIN, R. L. (1991). A Three-Dimensional Thermal and Electromagnetic Model of Whole Limb Heating with a MAPA. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 38-10, 1030–1039.

- CHEN, C. N. & HOULT, D. I. (1989). *Biomedical Magnetic Resonance Technology*. Bristol: Adam Hilger.
- CHOU, C.-K. & CHAN, J. A. M. K. W. (1997). RF-Heating of Implanted Spinal Fusion Stimulators During Magnetic Resonance Imaging. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 44-5, 367–373.
- CLEMENS, M., SCHUHMANN, R., VAN RIENEN, U. & WEILAND, T. (1996). Modern Krylov Subspace Methods in Electromagnetic Field Computation Using the Finite Integration Theory. *Applied Computational Electromagnetic Society*, 11-1, 70–84.
- CLEMENS, M. & WEILAND, T. (1998). Comparison of Krylov-Type Methods for Complex Linear Systems Applied to High-Voltage Problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34-5, 3335–3338.
- COLE, K. S. & COLE, R. H. (1941). Dispersion and absorption in dielectrics. *Journ. Chem. Physics*, 9, 341–351.
- COLLINS, C. M. & SMITH, M. B. (2001). Calculations of B1 Distribution, SNR, and SAR for a Surface Coil Adjacent to an Anatomically-Accurate Human Body Model. *Magnetic Resonance in Medicine*, 45, 692–699.
- DAVID, E., FACHNER, J. & REISSENWEBER, J. (1995). Elektrosensibilität ein Gesellschaftsproblem. *EMC Kompendium*, 208–213.
- DEBYE, P. (1929). *Polar Molecules*. The Chemical Catalog.
- DEHLER, M. (1994). *Numerische Lösung der Maxwellschen Gleichungen auf kreiszylindrischen Gittern*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt.
- DOHLUS, M. (1992). *Ein Beitrag zur numerischen Berechnung elektromagnetischer Felder im Zeitbereich*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt.
- DÖSSEL, O. (2000). *Bildgebende Verfahren in der Medizin*. Berlin: Springer.
- DUCK, F. A. (1990). *Physical Properties of Tissue*. London: Academic Press Ltd.
- DURNEY, C. H. & CHRISTENSEN, D. A. (2000). *Basic Introduction to Bioelectromagnetics*. Boca Raton: CRC Press LLC.
- EDRICH, J. & COOKSON, C. C. (1987). Electrosurgical Dispersive Electrodes Heat Cutaneous and Subcutaneous Skin Layers. *Medical Instrumentation*, 21-2, 81–86.
- FAIRES, J. D. & BURDEN, R. L. (1994). *Numerische Methoden*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- FRICK, H. (1992). *Allgemeine Anatomie - Spezielle Anatomie I*. Stuttgart: Thieme.
- FRICKE, H. (1925). A mathematical treatment of the electric conductivity and capacity of disperse systems. *Phys. Rev.*, 26, 678–681.
- FRICKE, H. (1932). The theory of electrolytic polarization. *Phil. Mag.*, 7-14, 310–318.
- GABRIEL, C., GABRIEL, S. & CORTHOUT, E. (1996a). The dielectric properties of biological tissues: I. Literature survey. *Phys. Med. Biol.*, 41, 2231–2249.

- GABRIEL, S., LAU, R. W. & GABRIEL, C. (1996b). The dielectric properties of biological tissues: II. Measurements in the frequency range 10 Hz to 20 GHz. *Phys. Med. Biol.*, 41, 2251–2269.
- GABRIEL, S., LAU, R. W. & GABRIEL, C. (1996c). The dielectric properties of biological tissues: III. Parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Phys. Med. Biol.*, 41, 2271–2293.
- GAUTHERIE, M. (1990). *Thermal Dosimetry and Treatment Planning*. Heidelberg: Springer.
- GEDDES, L. A. (1995). *Handbook of Electrical Hazards and Accidents*. Boca Raton: CRC Press.
- GEDDES, L. A. & BAKER, L. E. (1989). *Principles of applied Biomedical Instrumentation*. New York: Wiley.
- GOLOMBECK, M.-A. & DÖSSEL, O. (2000). Simulation der Auswirkung medizinischer Therapie- und Diagnosemethoden auf den menschlichen Körper unter der besonderen Berücksichtigung von Implantaten. *Biomedizinische Technik*, 45-1.
- GOLOMBECK, M.-A. & DÖSSEL, O. (2003). Magnetic Resonance Imaging and Implanted Electrodes: Deduction of Rules for Reducing Hazards for Patients by the Use of Numerical Methods. *Biomedizinische Technik*, 48-1, 366–367.
- GOLOMBECK, M.-A., DÖSSEL, O., STAUBERT, A. & TRONNIER, V. M. (1999). Magnetic Resonance Imaging with Implanted Neurostimulators: A First Numerical Approach Using Finite Integration Theory. *Proc. International Symposium on Electromagnetic Compatibility 99*.
- GOLOMBECK, M.-A., DÖSSEL, O., STAUBERT, A. & TRONNIER, V. M. (2000a). Abschätzung der Gefährdung von Patienten mit implantierten Tiefenhirnstimulationselektrode durch die Felder einer Magnetresonanztomographen (MRT) mittels numerischer Methoden. *EMC-Kompendium*.
- GOLOMBECK, M.-A., DÖSSEL, O., STAUBERT, A. & TRONNIER, V. M. (2000b). Numerical field calculations for answering questions concerning safety aspects of MRI in patients with implanted medical devices. *European Radiology*, C1-C42.
- GOLOMBECK, M.-A., DÖSSEL, O., STAUBERT, A. & TRONNIER, V. M. (2001a). EMV-Messungen in der Neurochirurgie. *EMC-Kompendium*, 284–287.
- GOLOMBECK, M.-A., DÖSSEL, O., TABBERT, M., METZNER, R. & TRONNIER, V. M. (2002a). MR-Tomographie bei Patienten mit aktiven Implantaten. *EMC Kompendium*, 209–212.
- GOLOMBECK, M.-A., DÖSSEL, O. & UND V. M. TRONNIER, A. S. (2000c). Numerical Models of the Human Body applied to EMC-Problems in the Surgery Room of the Future. *Compendium of the 4th European Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 193–198.
- GOLOMBECK, M.-A., RAISER, J. & DÖSSEL, O. (2003). Improvement of patient return electrodes in electrosurgery by experimental investigations and numerical field calculations. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 41, 519–528.
- GOLOMBECK, M.-A., RIEDEL, C. H. & DÖSSEL, O. (2002b). Calculation of the Dielectric Properties of Biological Tissue using simple Models of Cell Patches. *Biomedizinische Technik*, 47-1, 253–256.

- GOLOMBECK, M.-A., TABBERT, M. & DÖSSEL, O. (2001b). Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder in einem Oberkörperphantom mit Elektroden bei der Magnetresonanztomographie. *Biomedizinische Technik*, 46-1, 464–465.
- GOLOMBECK, M.-A., THIELE, J. & DÖSSEL, O. (2002c). Magnetic Resonance Imaging with implanted Neurostimulators: Numerical Calculation of the induced Heating. *Biomedizinische Technik*, 47-1, 660–663.
- GRAAF, K. M. D. & FOX, S. T. (1994). *Concepts of Human Anatomy and Physiology*. Wm. C. Brown Publishers.
- GREBMEIER, J., WEIKL, A., GLÜCKERT, K., HOFMANN-PREISS, K., HUK, W. J., ROEDL, W. & WOLF, P. (1991). In-vitro- und Patientenuntersuchungen mittels MRT: Bedeutung metallischer Implantate. *Fortschr. Röntgenstr.*, 154-5, 484–487.
- GRIFFITHS, H. (2001). Magnetic induction tomography. *Measurement Science and Technology*, 12, 1126–1131.
- GUSTRAU, F. (1997). *Ein Beitrag zur numerischen Berechnung der thermischen Belastung von Patienten durch hochfrequente elektromagnetische Felder während Magnet-Resonanztomographie-Untersuchungen*. Aachen: Shaker.
- HACKBUSCH, W. (1990). *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. Stuttgart: B. G. Teubner.
- HAHNE, P. (1992). *Zur numerischen Berechnung zeitharmonischer elektromagnetischer Felder*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt.
- HAKEN, H. & WOLF, H. C. (1996). *Atom- und Quantenphysik*. Heidelberg: Springer.
- HÖBER, R. (1910). Eine Methode die Elektrische Leitfähigkeit im Innern von Zellen zu messen. *Arch. f. d. ges. Physiol.*, 37, 237–259.
- HUBER, E. & URBAN, M. (1995). *Helmholtzspulen zur Kalibrierung von Magnetfeldsensoren* (Wissenschaftlicher Bericht). Forschungszentrum Karlsruhe Technik und Umwelt, Karlsruhe.
- HURT, W. D. (1985). Multiterm Debye dispersion relations for permittivity of muscle. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 32, 60–64.
- IBRAHIM, T. S., LEE, R., BAERTLEIN, B. A. & ROBITAILLE, P. M. L. (2001). B1-field homogeneity and SAR calculations for the birdcage coil. *Physics in Medicine and Biology*, 46, 609–619.
- ICNIRP (1998). Guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic, and electromagnetic fields (up to 300 GHz). *Health Physics*, 74-4, 494–519.
- IRNICH, W. (1996). 50Hz-Magnetfelder und Krebs - eine kritische Wertung gängiger Vorstellungen. *Electrical Engineering*, 79, 119–126.
- IRNICH, W. & SCHMITT, F. (1995). Magnetostimulation in MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 33, 619–623.
- IRPA (1991). Protection of the Patient undergoing a Magnetic Resonance Examination. *Health Physics*, 61-6, 923–928.

- JACKSON, J. D. (1975). *Classical Electrodynamics*. New York: John Wiley & Sons.
- JALURIA, Y. & TORRANCE, K. E. (1986). *Computational heat transfer*. Berlin: Springer.
- JIN, J. & CHEN, J. (1997). On the SAR and Field Inhomogeneity of Birdcage Coils Loaded with the Human Head. *Magnetic Resonance in Medicine*, 38, 953–963.
- JUNQUEIRA, L. C. & CARNEIRO, J. (2001). *Histologie*. Heidelberg: Springer.
- KAHAN, W. (1958). *Gauss-Seidel Methods of Solving Large Systems of Linear Equations*. Dissertation, University of Toronto, Toronto, Kanada.
- KRAWCZYK, F. & WEILAND, T. (1988). A new static field solver with open boundary conditions in the 3D-CAD-system MAFIA. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24-1, 55–58.
- KUCHLING, H. (1991). *Taschenbuch der Physik*. Frankfurt/Main: Verlag Harri Deutsch.
- KÜHNE, B. (1980). *Einfluß elektrischer 50-Hz-Felder hoher Feldstärke auf den menschlichen Organismus* (Wissenschaftlicher Bericht). Institut zur Erforschung elektrischer Unfälle, Berufsgenossenschaft der Feinmechanik und Elektrotechnik, Köln, Deutschland.
- KÜPFMÜLLER, K. & KOHN, G. (2000). *Theoretische Elektrotechnik und Elektronik*. Heidelberg: Springer.
- LAPICQUE, L. (1909). Definition experimental de l'excitation. *Hebd. Séances Acad. Sci.*, 67-2, 280–283.
- LEGGET, R. W. & WILLIAMS, L. R. (1991). Suggested Reference Values for Regional Blood Volumes in Humans. *Health Physics*, 2, 139–154.
- LEHNER, G. (1996). *Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker*. Heidelberg: Springer.
- LICK, W. (1989). *Difference Equations from Differential Equations - Lecture Notes in Engineering Nr. 41*. Heidelberg, Germany: Springer.
- LUECHINGER, R. (2002). *Safety Aspects of Cardiac Pacemakers in Magnetic Resonance Imaging*. Dissertation, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich.
- LUECHINGER, R., DURU, F., SCHEIDECKER, M. B., CANDINAS, R. & BOESIGER, P. (1999). Heating Effects of Magnetic Resonance Imaging on Pacemaker Leads: Effect of Lead Types and Positioning. *Proceedings of the EMBC*, 936–937.
- MAFIA (2000a). *H3- The Time Domain Thermodynamics Solver*. Darmstadt, Germany: CST.
- MAFIA (2000b). *W3- The Frequency Domain Solver*. Darmstadt, Germany: CST.
- MASAKO, K. & ICHIYNAGI, K. (1973). Still another mode of electrosurgical burn: A report of two cases and an experiment. *Anesth. Analg.*, 52, 19–22.
- MORNEBURG, H. (1995). *Bildgebende Systeme für die medizinische Diagnostik*. Erlangen: Publicis MCD. 3 edition.
- NESSLER, N. H. (1996). Risk analysis and risk minimizing measures for neutral electrodes in electrosurgery. *Proceedings of the 18th Annual International Conference for the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 1848–1849.

- NESSLER, N. H. (1999). Voltage, current and power inside the thigh model during electrosurgery. *Proceedings of the EMBEC*, 1139–1139.
- NYENHUIS, J. A., BOURLAND, J. D., FOSTER, K. S., GRABER, G. P., KILDIHSEV, A. V. & SCHAEFER, D. J. (1999). Magnetic Stimulation in Humans by MRI pulsed Gradient Fields. *Proc. BMES/EMBS Conf.*, 1074.
- NYENHUIS, J. A., BOURLAND, J. D. & SCHAEFER, D. J. (1997). Analysis from a stimulation perspective of the magnetic field patterns of MRI gradient coils. *J. Appl. Physics*, 81, 4314–4316.
- OVERMYER, K. M., PEARCE, J. A. & DEWITT, D. P. (1979). Measurements of temperature distributions at electro-surgical dispersive electrode sites. *Trans. ASME, Journal of Biomechanical Engineering*, 101, 66–72.
- PAŁKO, T. & GALWAS, B. (1999). Electrical Properties of Biological Tissues, their Measurements and Biomedical Applications. *Automedica*, 17, 343–365.
- PEARCE, J. A., GEDDES, L. A., BOURLAND, J. D. & SILVA, L. F. (1979). The thermal behavior of electrolyte-coated metal-foil dispersive electrodes. *Medical Instrumentation*, 13-5, 298–300.
- PETHIG, R. (1984). Dielectrical properties of biological material: Biophysical and medical applications. *IEEE Trans. Elec. Ins.*, EI-19, 453–474.
- PETHIG, R. (1991). Dielectric Properties of Tissue. *Encyclopedia of Human Biology*, 3, 281–288.
- PINDER, M. (1998). *Zur numerischen Berechnung gekoppelter elektromagnetischer und thermischer Felder*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt.
- RAISER, J., GOLOMBECK, M.-A. & DÖSSEL, O. (2002). Numerical Field Calculation of Patient Return Electrodes in Electrosurgery. *Biomedizinische Technik*, 47-1, 274–277.
- REISSENWEBER, J., DAVID, E. & FACHNER, J. (1996). Elektrische und magnetische Felder und ihre biologischen Wirkungen im Nieder- und Hochfrequenzbereich. *Zentralblatt für Arbeitsmedizin, Arbeitsschutz und Ergonomie mit Beiträgen zur Umweltmedizin*, 46, 206–219.
- REZAI, A. R., FINELLI, D., NYENHUIS, J. A., HRDLICKA, G., TKACH, J., SHARAN, A., RUGIERI, P., STYPLUKOWSKI, P. H. & SHELLOCK, F. G. (2002). Neurostimulation Systems for Deep Brain Stimulation: In Vitro Evaluation of Magnetic Resonance Imaging-Related Heating at 1.5 Tesla. *J. Magn. Res. Imag.*, 15, 241–250.
- RICK, J., GOLOMBECK, M.-A. & DÖSSEL, O. (2002). Numerical Calculations of switched magnetic Field Gradients during Magnetic Resonance Imaging. *Biomedizinische Technik*, 47-1, 739–742.
- RIGAUD, B., MORUCCI, J.-P. & CHAUVEAU, N. (1996). Bioelectrical impedance techniques in medicine, Part: I Second section: Impedance spectrometry. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 24(4-6), 257–351.
- SAAD, Y. (1995). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Boston: PWS Publishing Company.

- SACHSE, F. B. (1998). *Modelle des menschlichen Körpers zur Berechnung von physikalischen Feldern*. Aachen: Shaker.
- SACHSE, F. B., WERNER, C. D. & DÖSSEL, O. (2000a). Modellierung des menschlichen Herzens. *Biomedizinische Technik*, 45-1, 361–362.
- SACHSE, F. B., WERNER, C. D., MEYER-WAARDEN, K. & DÖSSEL, O. (2000b). Development of a human body model for numerical calculation of electrical fields. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 24, 165–171.
- SCHELLHAMMER, P. F. (1974). Electrosurgery - principles, hazards, and precautions. *Urology*, 3, 261–268.
- SCHEPPS, J. L. & FOSTER, K. R. (1980). The UHF and MW dielectric properties of normal and tumor tissues. Variation in dielectric properties with tissue water content. *Phys. Med. Biol.*, 25, 1149–1159.
- SCHICK, M., GEISBUSCH, L. & LANDSTORFER, F. M. (2001). Numerical Study of Coupling between Coagulators and Electrodes of Cardiac Pacemakers. *Proceedings of the 31st European Microwave Conference EuMC, London*, 3, 231–234.
- SCHICK, M. & LANDSTORFER, F. M. (2003). Numerical Study of Coupling between Coagulators and Electrodes of Cardiac Pacemakers under Consideration of the Human Body. *19th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, ACES Conference, Monterey*, 879–884.
- SCHMIDT, R. F., THEWS, G. & LANG, F. (2000). *Physiologie des Menschen*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer. 28 edition.
- SCHWAN, H. P. (1957). Electrical properties of tissue and cell suspensions. *Adv. Biol. Med. Phys.*, 5, 147–209.
- SCHWAN, H. P. & FOSTER, K. R. (1980). RF-Field interactions with biological systems: electrical properties and biophysical mechanisms. *Proc. IEEE*, 68, 104–113.
- ŠIMUNIĆ, D., WACH, P. & RENHART, W. (1996a). Analysis of Eddy Currents Originating from Switched Magnetic Gradient Fields in Magnetic Resonance Imaging. *Biomedizinische Technik*, 41, 79–83.
- ŠIMUNIĆ, D., WACH, P., RENHART, W. & STOLLBERGER, R. (1996b). Spatial Distribution of High-Frequency Electromagnetic Energy in Human Head During MRI: Numerical Results and Measurements. *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, 43-1, 88–94.
- SMITH, S. & AASEN, R. (1992). The Effects of electromagnetic Fields on Cardiac Pacemakers. *IEEE Trans. Broadcast.*, 38-2, 136–139.
- SOMMER, T., VAHLHAUS, C., LAUCK, G., v. SMEKAL, A., REINKE, M., HOFER, U., BLOCK, W., TRÄBER, F., SCHNEIDER, C., GIESEKE, J., JUNG, W. & SCHILD, H. (2000). MR Imaging and Cardiac Pacemakers: In Vitro Evaluation and in Vivo Studies in 51 Patients at 0.5 T. *Radiology*, 215, 869–879.
- STÖCKER, H. (1998). *Taschenbuch der Physik*. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.

- STOGRYN, A. (1971). Equations for Calculating the Dielectric Constants of Saline Water. *IEEE Trans. Microwav. Theory Techn.*, 733–736.
- TABBERT, M. (2001). *Auswirkungen der Magnetresonanztomographie auf elektrisch stimulierende Implantate im menschlichen Körper* (Diplomarbeit). Institut für Biomedizinische Technik, Universität Karlsruhe (TH).
- TABBERT, M., GOLOMBECK, M.-A. & DÖSSEL, O. (2001). Auswirkungen der Magnetresonanztomographie auf aktive Implantate im menschlichen Körper. *Biomedizinische Technik*, 46-1, 466–467.
- THIELE, J. (2002). *Eine Simulation der thermischen Belastung von Patienten durch Einkopplung hochfrequenter elektromagnetischer Felder* (Diplomarbeit). Institut für Biomedizinische Technik, Universität Karlsruhe (TH).
- THIELE, J. P., GOLOMBECK, M.-A. & DÖSSEL, O. (2002). Thermal Heating of Human Tissue induced by electromagnetic Fields of Magnetic Resonance Imaging. *Biomedizinische Technik*, 47-1, 743–746.
- THOMA, P. (1997). *Zur numerischen Lösung der Maxwellschen Gleichungen im Zeitbereich*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt.
- THOMA, P. & WEILAND, T. (1998). Numerical Stability of Finite Difference Time Domain Methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34-5, 2740–2743.
- TRONNIER, V. M., KRAUSE, M., HECK, A., KRONENBÜRGER, M., BONSANTO, M. M., TRONNIER, J. & FOGEL, W. (1999a). Deep Brain Stimulation for the Treatment of Movement Disorders. *Neurology, Psychiatry and Brain Research*, 6, 199–212.
- TRONNIER, V. M., STAUBERT, A., HÄHNEL, S. & SAREM-ASLANI, A. (1999b). Magnetic Resonance Imaging with Implanted Neurostimulators: An In Vitro and In Vivo Study. *Neurosurgery*, 44-1, 118–126.
- TURNER, R. (1993). Gradient coil design: A review of methods. *Magnetic Resonance Imaging*, 11, 903–920.
- UNGER, H. G. (1988). *Elektromagnetische Theorie für die Hochfrequenztechnik, Teil 1+2*. Heidelberg: Hüthig.
- VAN RIENEN, U. & WEILAND, T. (1988). Impedance Calculation above Cut-Off with URMEL-I. *First European Particle Accelerator Conference EPAC, Rom*, 890–892.
- VAN RIENEN, U. & WEILAND, T. (1990). Impedance Calculation with URMEL-I Using Multigrid Methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26-2, 743–746.
- VILLA, M., MUSTARELLI, P. & CAPROTTI, M. (1991). Minireview Biological Effects of Magnetic Fields. *Life Sciences*, 49, 85–92.
- WAGNER, W. (1993). *Wärmeübertragung*. Würzburg, Deutschland: Vogel Buchverlag.
- WEILAND, T. (1977). A Discretisation Method for the Solution of Maxwell's Equations for Six-Component Fields. *Electronics and Communication*, 31, 116–120.
- WEILAND, T. (1987). Die Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen. *Phys. Bl.*, 42, 191–201.

- WEILAND, T., BARTSCH, M., BECKER, U., BIHN, M., BLELL, U., CLEMENS, M., DEHLER, M., DOHLUS, M., DREVLAK, M., DU, X., EHMANN, R., EUFINGER, A., GUTSCHLING, S., HAHNE, P., KLATT, R., KRIETENSTEIN, B., LANGSTROF, A., PINDER, P., PODEBRAD, O., PRÖPPER, T., VAN RIENNEN, U., SCHMIDT, D., SCHUHMANN, R., SCHULZ, A., SCHUPP, S., SCHÜTT, P., THOMA, P., TIMM, M., WAGNER, B., WEBER, R., WIPF, S., WOLTER, H. & MIN, Z. (1996). MAFIA Version 4. *Proc. of the Computational Accelerator Physics Conference (CAP)*, 65–70.
- WEISS, G. G. (1901). Sur la possibilite de rendre comparables entre eux les appareils à l'excitation. *Arch. Ital. Biol.*, 35, 413–446.
- WILEY, J. D. & WEBSTER, J. G. (1982). Analysis and Control of the Current Distribution under Circular Dispersive Electrodes. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 29-5, 381–385.
- YEUNG, C. J., SUSIL, R. C. & ATALAR, E. (2002). RF Safety of Wires in Interventional MRI: Using a Safety Index. *Magnetic Resonance in Medicine*, 47, 187–193.
- ZHANG, J., WILSON, C. L., LEVESQUE, M. F., BEHNKE, E. J. & LUFKIN, R. B. (1993). Temperature Changes in Nickel-Chromium Intracranial Depth Electrodes during MR Scanning. *Am. Journ. Neuroradiology*, 14, 497–500.



# Danksagung

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Biomedizinische Technik der Universität Karlsruhe (TH). Obwohl eine Dissertation die wissenschaftliche Leistung eines Einzelnen darstellt, konnte diese Aufgabe dennoch nicht alleine bewältigt werden. Zahlreiche Personen haben mir während meiner Zeit als Doktorand auf vielfältige Art und Weise geholfen. Bei ihnen möchte ich mich im folgenden bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel für die gute fachliche Betreuung, die zahlreichen Anregungen und die immer wieder interessanten wissenschaftlichen Diskussionen, die maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Werner Wiesbeck möchte ich für sein Interesse an der Arbeit und die Übernahme des Korreferates ebenfalls herzlich danken.

Dank gilt auch Herrn Dipl.-Ing. Martin Tabbert, Herrn Dipl.-Ing. Edvin Eriksen, Herrn Dipl.-Ing. Pascal Daleiden, Herrn Dipl.-Ing. Johannes Häfner, Herrn Dipl.-Ing. Jörn Thiele und Herrn cand. el. Jochen Rick, die mit ihren Studien- und Diplomarbeiten einen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet haben.

Sehr danken möchte ich auch der Werkstatt des Instituts für Theoretische Elektrotechnik und Systemoptimierung der Universität Karlsruhe (TH) für die zahlreichen Messaufbauten, ohne die mein experimentelles wissenschaftliches Arbeiten nicht möglich gewesen wäre.

Ebenfalls danken möchte ich allen Kooperationspartnern aus Industrie und Forschung für die fruchtbare Zusammenarbeit. Besonderer Dank gilt hier Herrn Dipl.-Ing. Jürgen Raiser, Herrn Dr. sc. hum. Andreas Staubert und Herrn Dr. med. Roland Metzner, sowie allen anderen bisher ungenannten Personen meiner Kooperationspartner.

Dank gilt zudem allen meinen Kollegen am Institut für Biomedizinische Technik der Universität Karlsruhe (TH) für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die konstruktive Zusammenarbeit.

Mein besonderer Dank gilt auch Frau Evelyn Tichy für die Hilfe bei der Korrektur der englischen Kurzzusammenfassung, ihr großes Verständnis und Interesse für meine Forschungsarbeit und ihre immer verlässliche Unterstützung und den Rückhalt, den sie mir den letzten zwei Jahren gegeben hat. Ich danke ihr auch dafür, dass sie die Tiefen und Höhen in dieser Zeit mit mir geteilt hat und mir geholfen hat, mich nicht gänzlich in der Promotion zu verlieren. Ohne sie wäre diese Arbeit nie zu dem geworden, was sie heute ist.

Meiner Mutter sei diese Arbeit gewidmet. Leider ist ihr dieser Augenblick nicht mehr vergönnt.

Große Teile dieser Arbeit sind im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Sonderforschungsbereiches 425 „EMV in der Klinik und in der Fabrik“, Teilprojekt A1 „EMV-Probleme im Operationssaal der Zukunft“ entstanden.



# **Lebenslauf**

Marc-André Golombeck

16.05.1973 Geburt in Karlsruhe-Durlach, Baden-Württemberg

1979-1983 Werner-von-Siemens-Grundschule in Karlsruhe

1983-1992 Humboldt-Gymnasium in Karlsruhe  
Abschluss Abitur

1992-1998 Studium der Physik an der Universität Karlsruhe (TH)  
Schwerpunkte: Atom- und Kernphysik, Elektronik,  
Biomedizinische Technik

1997-1998 Diplomarbeit am Forschungszentrum Karlsruhe,  
Hauptabteilung Zyklotron  
Abschluss Diplom-Physiker

1999- Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut  
für Biomedizinische Technik, Universität Karlsruhe (TH)